

Supplement to
LEVELS OF POSITIVE DEFINITE TERNARY QUADRATIC FORMS

J. LARRY LEHMAN

TABLE 1
 ALL REDUCED TERNARY FORMS OF LEVEL $N \leq 100$

For each level $N \leq 100$, the reduced forms are grouped by character and by discriminant. A wedge (\vee) between two forms indicates that those forms are in the same genus.

$N = 4$

<u>q</u>	<u>d</u>	
1	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$N = 8$

<u>q</u>	<u>d</u>	
1	16	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	64	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
2	2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
	8	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

N=24

q	d
1	144
	$\begin{pmatrix} 166 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 388 \\ 477 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 223 \\ 244 \\ -800 \end{pmatrix}$
2	18
	$\begin{pmatrix} 222 \\ 116 \\ 00-1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 233 \\ 136 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 223 \\ 126 \\ 000 \end{pmatrix}$
3	48
	$\begin{pmatrix} 445 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 188 \\ -4-40 \\ -800 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 112 \\ 112 \\ 00-1 \end{pmatrix}$
6	6
	$\begin{pmatrix} 116 \\ -1-10 \\ 00-1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 24 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$

N=12

q	d
1	9
	$\begin{pmatrix} 113 \\ 001 \\ 001 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 133 \\ 133 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 366 \\ 366 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 223 \\ 00-2 \\ 00-2 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 144 \\ 144 \\ 000 \end{pmatrix}$
3	3
	$\begin{pmatrix} 001 \\ 001 \\ 001 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 122 \\ 122 \\ -200 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 066 \\ 066 \\ -400 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 48 \\ -400 \\ -400 \end{pmatrix}$

N=28

q	d
1	49
	$\begin{pmatrix} 127 \\ 00-1 \\ 00-1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 177 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 247 \\ 00-2 \\ 00-2 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 478 \\ 040 \\ 040 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 112 \\ 112 \\ 0-10 \end{pmatrix}$
7	7
	$\begin{pmatrix} 117 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 124 \\ -200 \\ -200 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 223 \\ 223 \\ 222 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 112 \\ 148 \\ -400 \end{pmatrix}$

N=16

q	d
1	16
	$\begin{pmatrix} 114 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 144 \\ 144 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 124 \\ 124 \\ 000 \end{pmatrix}$
2	32

N=32

q	d
1	64
	$\begin{pmatrix} 128 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 188 \\ 188 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 455 \\ 455 \\ 00-2 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 233 \\ -200 \\ 244 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 338 \\ 338 \\ 00-2 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1024 \\ 31111 \\ -10-2-2 \end{pmatrix}$
2	8
	$\begin{pmatrix} 113 \\ 111 \\ 111 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 223 \\ 118 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 223 \\ -2-20 \\ 334 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 133 \\ 148 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 128 \\ 128 \\ 000 \end{pmatrix}$

N=20

q	d
1	25
	$\begin{pmatrix} 222 \\ -1-1-1 \\ -1-1-1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 155 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 235 \\ 00-2 \\ 00-2 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 400 \\ 377 \\ -6-2-2 \end{pmatrix}$
5	5
	$\begin{pmatrix} 112 \\ 111 \\ 111 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 115 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 333 \\ 333 \\ 222 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 123 \\ -700 \\ -700 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 80 \end{pmatrix}$

N=48

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{36}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \end{pmatrix}$
	144	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$
	576	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$
	2304	$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 15 \\ -6 & -6 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ -1 & 6 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$
$\frac{q}{2}$	$\frac{d}{288}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$
$\frac{q}{3}$	$\frac{d}{12}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
	48	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	192	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$
	768	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ -1 & 6 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$
$\frac{q}{6}$	$\frac{d}{96}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

N=52

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{169}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ -8 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
	676	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & \end{pmatrix}$
	2704	$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 4 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
	13	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	
	52	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
	208	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	

N=56

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{784}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$
	3136	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{2}$	$\frac{d}{98}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \end{pmatrix}$
	392	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
	7	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	448	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$
$\frac{q}{14}$	$\frac{d}{14}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
	56	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

N=36

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{36}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	324	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{3}$	$\frac{d}{27}$	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	108	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$
	432	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

N=40

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{400}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$
	1600	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & -6 & \end{pmatrix}$
$\frac{q}{2}$	$\frac{d}{50}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
	200	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \end{pmatrix}$
$\frac{q}{5}$	$\frac{d}{80}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
	320	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 7 \\ -4 & -4 & 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & \end{pmatrix}$
$\frac{q}{10}$	$\frac{d}{10}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
	40	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

N=44

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{121}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
	484	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
	1936	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{11}$	$\frac{d}{11}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
	44	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	176	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

N=72

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{144}$	$(2,2,9)$	\vee	$(1,4,10)$	\vee	$(3,3,5)$
		$(0,0,0)$		$(-4,0,0)$		$(2,2,2)$
	576	$(4,4,1)$		$(2,2,-2)$		
	1296	$(1,18,18)$		$(4,9,10)$		$(5,8,11)$
	5184	$(0,0,0)$		$(0,-4,0)$		$(8,2,4)$
		$(4,19,19)$		$(8,11,20)$		
		$(2,4,4)$		$(4,8,8)$		
2	18	$(1,1,5)$		$(1,2,3)$		
		$(-1,-1,0)$		$(-2,-1,0)$		
	72	$(1,1,18)$		$(2,2,5)$		$(2,3,4)$
		$(0,0,0)$		$(0,-2,0)$		$(0,0,0)$
	162	$(2,5,5)$		$(1,7,7)$		
		$(1,2,2)$		$(5,1,1)$		
	648	$(2,9,9)$		$(2,5,18)$		$(4,7,7)$
		$(0,0,0)$		$(0,0,-2)$		$(0,0,0)$
	3	432		$(3,4,10)$		$(1,6,18)$
		$(0,0,0)$		$(0,0,0)$		$(0,0,0)$
	1728	$(8,8,9)$		$(4,12,13)$		$(1,24,24)$
		$(0,0,-8)$		$(-12,-4,0)$		$(-4,-4,-2)$
	6	54		$(1,1,18)$		$(2,3,3)$
		$(0,0,-1)$		$(2,2,2)$		$(1,4,4)$
		$(1,3,18)$		$(1,2,2)$		$(-3,0,0)$
		$(0,0,0)$		$(2,5,6)$		$(1,6,9)$
		$(0,0,0)$		$(0,0,-2)$		$(0,0,0)$

N=76

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{361}$	$(1,5,19)$	\vee	$(4,5,6)$		
		$(0,0,-1)$		$(5,1,2)$		
	1444	$(1,19,19)$		$(4,5,19)$		$(2,10,19)$
		$(0,0,0)$		$(0,0,-2)$		$(0,0,-2)$
	5776	$(4,19,20)$		$(7,11,23)$		$(3,13,13)$
		$(0,-4,0)$		$(-10,-6,-2)$		
19	19	$(1,1,5)$		$(1,2,3)$		
		$(0,-1,0)$		$(1,1,1)$		
	76	$(1,1,19)$		$(1,4,5)$		$(2,3,4)$
		$(0,0,0)$		$(-2,0,0)$		$(-2,0,0)$
	304	$(1,4,20)$		$(4,5,5)$		$(-2,0,-4)$
		$(-4,0,0)$		$(-2,0,-4)$		

N=60

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{225}$	$(1,4,15)$	\vee	$(2,2,15)$		
		$(0,0,-1)$		$(0,0,-1)$		
	900	$(1,15,15)$		$(5,6,9)$		$(3,5,15)$
		$(0,0,0)$		$(-6,0,0)$		$(0,0,0)$
	3600	$(4,15,16)$		$(3,20,20)$		
		$(0,-4,0)$		$(0,0,-4)$		
3	75	$(2,2,5)$		$(1,5,5)$		
		$(0,-1)$		$(0,0,-1)$		
	300	$(3,5,5)$		$(2,5,8)$		$(1,5,15)$
		$(0,0,0)$		$(0,0,-2)$		$(0,0,0)$
	1200	$(5,8,8)$		$(1,20,20)$		
		$(-4,0,0)$		$(4,5,16)$		
5	45	$(2,2,3)$		$(-2,0,0)$		$(0,-4,0)$
		$(1,1,15)$		$(1,3,4)$		
		$(0,0,-1)$		$(0,0,-1)$		
	180	$(3,5,5)$		$(2,3,8)$		$(3,4,4)$
		$(0,0,0)$		$(-6,0,0)$		$(1,3,15)$
	720	$(3,8,8)$		$(4,15,16)$		$(0,0,0)$
		$(0,0,-4)$		$(-4,0,0)$		
15	15	$(1,1,4)$		$(1,1,2)$		
		$(0,-1,0)$		$(0,-1,0)$		
	60	$(1,1,15)$		$(1,4,4)$		$(2,2,5)$
		$(0,0,0)$		$(-2,0,0)$		$(0,0,-2)$
	240	$(1,4,16)$		$(4,4,5)$		$(1,8,8)$
		$(0,0,-4)$		$(0,0,-4)$		$(-4,0,0)$

N=64

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{64}$	$(1,1,16)$	\vee	$(2,2,5)$		$(1,4,5)$
		$(0,0,0)$		$(-2,-2,0)$		$(-4,0,0)$
	256	$(1,4,16)$		$(4,4,5)$		
		$(0,0,0)$		$(0,-4,0)$		
	1024	$(1,16,16)$		$(4,9,9)$		$(4,5,16)$
		$(0,0,0)$		$(3,4,4)$		$(0,0,-4)$
2	128	$(1,2,16)$		$(3,3,5)$		$(1,6,6)$
		$(0,0,0)$		$(-2,-2,-2)$		$(-4,0,0)$
	512	$(1,8,16)$		$(4,7,7)$		$(3,3,16)$
		$(0,0,0)$		$(6,4,4)$		$(0,0,-2)$

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{289}$	$(3,6,6)$	\vee	$(3,5,6)$		
		$(-5,-2,-2)$		$(1,2,3)$		
	1156	$(1,17,17)$		$(2,9,17)$		$(3,6,17)$
		$(0,0,0)$		$(0,0,-2)$		$(5,7,11)$
	4624	$(3,23,23)$		$(7,11,20)$		$(0,0,-2)$
		$(-2,-2,-2)$		$(-8,-4,-6)$		
17	17	$(1,1,6)$		$(1,2,3)$		
		$(1,1,1)$		$(2,1,1)$		
	68	$(1,1,17)$		$(1,2,5)$		$(1,3,6)$
		$(0,0,0)$		$(-2,0,0)$		$(2,2,2)$
	272	$(4,4,7)$		$(3,4,7)$		$(-2,0,0)$
		$(-4,4,4)$		$(-4,-2,0)$		

N=88

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{1936}$	$\begin{pmatrix} 12222 \\ 0000 \\ 42323 \\ 2444 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 5914 \\ -8-4-2 \\ 121515 \\ -14-4-4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 21122 \\ 0000 \\ 81124 \\ 0-80 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 6811 \\ 00-4 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{2}$	$\frac{d}{242}$	$\begin{pmatrix} 266 \\ 1222 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 267 \\ 612 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1322 \\ 00-1 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{11}$	$\frac{d}{968}$	$\begin{pmatrix} 21111 \\ 0000 \\ 22111 \\ 3445 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 678 \\ 246 \\ 345 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11122 \\ 0000 \\ 1222 \\ 168 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 3422 \\ 00-2 \\ 168 \\ -400 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{22}$	$\frac{d}{704}$	$\begin{pmatrix} 4415 \\ -4-4-4 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 4512 \\ -40-4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1824 \\ -800 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{88}$	$\frac{d}{22}$	$\begin{pmatrix} 116 \\ -1-10 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 222 \\ 112 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 0-10 \end{pmatrix}$
	$\frac{d}{88}$	$\begin{pmatrix} 1122 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 235 \\ 222 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1211 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 234 \\ -200 \end{pmatrix}$

N=80

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{100}$	$\begin{pmatrix} 227 \\ -1-1-1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 333 \\ 111 \\ 455 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 320 \\ 60-2 \\ 5812 \\ -800 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 357 \\ -30 \\ 3720 \\ 00-2 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{2}$	$\frac{d}{800}$	$\begin{pmatrix} 4510 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 11020 \\ 0000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3710 \\ 00-2 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{5}$	$\frac{d}{20}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ -10-1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 117 \\ 111 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1145 \\ 0000 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{80}$	$\frac{d}{320}$	$\begin{pmatrix} 445 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1420 \\ 0000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 137 \\ 300 \\ 347 \\ -800 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{10}$	$\frac{d}{160}$	$\begin{pmatrix} 3111 \\ 622 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 777 \\ -2-2-2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1410 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 237 \\ -200 \end{pmatrix}$

N=84

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{441}$	$\begin{pmatrix} 288 \\ -5-1-1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 377 \\ -700 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 367 \\ 00-3 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{1764}$	$\frac{d}{7056}$	$\begin{pmatrix} 2121 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 689 \\ 32828 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3721 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 6712 \\ 00-60 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 31414 \\ -14000 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{3}$	$\frac{d}{147}$	$\begin{pmatrix} 335 \\ -2-2-1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 177 \\ -700 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12210 \\ 000-1 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{588}$	$\frac{d}{2352}$	$\begin{pmatrix} 377 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 557 \\ 51212 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3512 \\ -4-2-2 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 4821 \\ -2800 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{7}$	$\frac{d}{63}$	$\begin{pmatrix} 1121 \\ 00-1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 136 \\ -300 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1121 \\ 00-1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 136 \\ -300 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{252}$	$\frac{d}{1008}$	$\begin{pmatrix} 337 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 355 \\ 4421 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 258 \\ 422 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1321 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1612 \\ -600 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 2311 \\ 00-20 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 2221 \\ 00-2 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{21}$	$\frac{d}{84}$	$\begin{pmatrix} 117 \\ -1-10 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 123 \\ 00-1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 117 \\ 123 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1230 \\ 00-1 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{336}$	$\frac{d}{336}$	$\begin{pmatrix} 1121 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1211 \\ 447 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 333 \\ -200 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 333 \\ 348 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 155 \\ -400 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 227 \\ 00-2 \end{pmatrix}$

N=92

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{529}$	$\begin{pmatrix} 1623 \\ 00-1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 388 \\ -7-2-2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2323 \\ 00-1 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{2116}$	$\frac{d}{8464}$	$\begin{pmatrix} 12323 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 21223 \\ 00-2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3823 \\ 00-2 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 4623 \\ 00-2 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{23}$	$\frac{d}{92}$	$\begin{pmatrix} 42324 \\ 0-40 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 33131 \\ -30-2-2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 81223 \\ 00-4 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 123 \\ 1118 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{368}$	$\frac{d}{368}$	$\begin{pmatrix} 116 \\ 0-10 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1118 \\ 1111 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 1118 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 123 \\ 1111 \end{pmatrix}$
		$\begin{pmatrix} 1123 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1212 \\ 449 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 138 \\ -200 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1812 \\ 444 \end{pmatrix}$
		$\begin{pmatrix} 1424 \\ -400 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 444 \\ 444 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 146 \\ -200 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 146 \\ -200 \end{pmatrix}$

$\frac{q}{1}$	$\frac{d}{529}$	$\begin{pmatrix} 1623 \\ 00-1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 388 \\ -7-2-2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2323 \\ 00-1 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{2116}$	$\frac{d}{8464}$	$\begin{pmatrix} 12323 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 21223 \\ 00-2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3823 \\ 00-2 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 4623 \\ 00-2 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{23}$	$\frac{d}{92}$	$\begin{pmatrix} 42324 \\ 0-40 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 33131 \\ -30-2-2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 81223 \\ 00-4 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 123 \\ 1118 \end{pmatrix}$
$\frac{q}{368}$	$\frac{d}{368}$	$\begin{pmatrix} 116 \\ 0-10 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1118 \\ 1111 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 1118 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 123 \\ 1111 \end{pmatrix}$
		$\begin{pmatrix} 1123 \\ 0000 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1212 \\ 449 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 138 \\ -200 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1812 \\ 444 \end{pmatrix}$
		$\begin{pmatrix} 1424 \\ -400 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 444 \\ 444 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 146 \\ -200 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 146 \\ -200 \end{pmatrix}$

TABLE 2

For each prime $p < 1000$, $s = s_q(4p)$ and $\Delta = s - \dim S_{3^n}(4p, \chi_q)$, where $q = 1$ or p .

q	d	$N=96$				$N=100$			
1	576	(368) $(0,0)$ $(1,24)$ $(0,0)$ $(7,1528)$ $(-12,-4,-6)$	$(2,98)$ $(-6,0)$ $(4,24)$ $(0,0)$ $(3,3232)$ $(-32,0)$	$(2,324)$ $(0,0)$ $(4,1313)$ $(2,4,4)$ $(11,11,25)$ $(-6,-9,-10)$	$(5,5,6)$ $(0,0,-2)$ $(8,9,9)$ $(-6,0,0)$	$(1,2,13)$ $(-2,0,0)$ $(2,13,25)$ $(0,0,-2)$	$(2,3,5)$ $(-2,-2,0)$ $(9,14)$ $(1,4,9)$ $(3,17)$ $(2,3,25)$ $(0,0,-2)$ $(4,-11,15)$ $(-10,0,-4)$	$(2,2,9)$ $(2,2,2)$ $(3,17,17)$ $(-16,-2,-2)$	$(2,5,13)$ $(0,-2,0)$
2	72	$(2,2)$ $(1,1)$ $(3,3)$ $(0,0)$ $(1,12,24)$ $(0,0,0)$ $(0,0,0)$ $(3,88)$ $(0,0)$ $(5,13,13)$ $(-6,-2,-2)$	$(1,1,24)$ $(0,0,4)$ $(3,5)$ $(-2,0)$ $(4,99)$ $(-6,0)$ $(3,6)$ $(0,0,-2)$ $(0,0,-2)$ $(1,32,32)$ $(-32,0,0)$	$(1,1,25)$ $(-6,-9,-10)$ $(3,1,9)$ $(-2,-4,4)$ $(4,24)$ $(0,0)$ $(6,6)$ $(0,0)$ $(7,7)$ $(-2,-6,-6)$ $(4,25)$	$(1,9,9)$ $(-6,0)$ $(4,7,12)$ $(0,0,2)$ $(2,4,7)$ $(0,0,0)$ $(3,24)$ $(0,0,-2)$	$(2,2,13)$ $(-2,0,0)$ $(2,7,7)$ $(-2,-2,0)$	$(1,1,8)$ $(0,0,-1)$ $(1,1)$ $(2,7)$ $(-4,0)$ $(3,12)$ $(0,0,-2)$	$(2,3,3)$ $(0,0,-2)$ $(4,5,5)$ $(-2,0,0)$	$(1,5,5)$ $(-4,0)$ $(4,7)$ $(0,-4,0)$
3	192	$(1,12,24)$ $(0,0,0)$ $(0,0,0)$ $(3,12)$ $(0,0,-2)$ $(3,88)$ $(0,0)$ $(5,13,13)$ $(-6,-2,-2)$	$(1,24)$ $(0,0,0)$ $(3,5)$ $(-2,0)$ $(4,99)$ $(-6,0)$ $(3,6)$ $(0,0,-2)$ $(0,0,-2)$ $(1,32,32)$ $(-32,0,0)$	$(1,1,25)$ $(-6,-9,-10)$ $(3,1,9)$ $(-2,-4,4)$ $(4,24)$ $(0,0)$ $(6,6)$ $(0,0)$ $(7,7)$ $(-2,-6,-6)$ $(4,25)$	$(1,9,9)$ $(-6,0)$ $(4,7,12)$ $(0,0,2)$ $(2,4,7)$ $(0,0,0)$ $(3,24)$ $(0,0,-2)$	$(2,2,13)$ $(-2,0,0)$ $(2,7,7)$ $(-2,-2,0)$	$(1,1,8)$ $(0,0,-1)$ $(1,1)$ $(2,7)$ $(-4,0)$ $(3,12)$ $(0,0,-2)$	$(2,3,3)$ $(0,0,-2)$ $(4,5,5)$ $(-2,0,0)$	$(1,5,5)$ $(-4,0)$ $(4,7)$ $(0,-4,0)$
6	24	$(1,2,4)$ $(2,1,1)$ $(1,1,24)$ $(0,0,0)$ $(3,4,8)$ $(0,0,0)$	$(1,1,8)$ $(0,0,-1)$ $(1,1)$ $(2,7)$ $(-4,0)$ $(3,12)$ $(0,0,-2)$	$(1,1,25)$ $(-6,-9,-10)$ $(3,1,9)$ $(-2,-4,4)$ $(4,24)$ $(0,0)$ $(6,6)$ $(0,0)$ $(7,7)$ $(-2,-6,-6)$ $(4,25)$	$(1,9,9)$ $(-6,0)$ $(4,7,12)$ $(0,0,2)$ $(2,4,7)$ $(0,0,0)$ $(3,24)$ $(0,0,-2)$	$(2,2,13)$ $(-2,0,0)$ $(2,7,7)$ $(-2,-2,0)$	$(1,1,8)$ $(0,0,-1)$ $(1,1)$ $(2,7)$ $(-4,0)$ $(3,12)$ $(0,0,-2)$	$(2,3,3)$ $(0,0,-2)$ $(4,5,5)$ $(-2,0,0)$	$(1,5,5)$ $(-4,0)$ $(4,7)$ $(0,-4,0)$
	96	$(1,1,24)$ $(0,0,0)$ $(3,4,8)$ $(0,0,0)$	$(1,1,8)$ $(0,0,-1)$ $(1,1)$ $(2,7)$ $(-4,0)$ $(3,12)$ $(0,0,-2)$	$(1,1,25)$ $(-6,-9,-10)$ $(3,1,9)$ $(-2,-4,4)$ $(4,24)$ $(0,0)$ $(6,6)$ $(0,0)$ $(7,7)$ $(-2,-6,-6)$ $(4,25)$	$(1,9,9)$ $(-6,0)$ $(4,7,12)$ $(0,0,2)$ $(2,4,7)$ $(0,0,0)$ $(3,24)$ $(0,0,-2)$	$(2,2,13)$ $(-2,0,0)$ $(2,7,7)$ $(-2,-2,0)$	$(1,1,8)$ $(0,0,-1)$ $(1,1)$ $(2,7)$ $(-4,0)$ $(3,12)$ $(0,0,-2)$	$(2,3,3)$ $(0,0,-2)$ $(4,5,5)$ $(-2,0,0)$	$(1,5,5)$ $(-4,0)$ $(4,7)$ $(0,-4,0)$
	384	$(3,4,8)$ $(0,0,0)$	$(1,1,8)$ $(0,0,-1)$ $(1,1)$ $(2,7)$ $(-4,0)$ $(3,12)$ $(0,0,-2)$	$(1,1,25)$ $(-6,-9,-10)$ $(3,1,9)$ $(-2,-4,4)$ $(4,24)$ $(0,0)$ $(6,6)$ $(0,0)$ $(7,7)$ $(-2,-6,-6)$ $(4,25)$	$(1,9,9)$ $(-6,0)$ $(4,7,12)$ $(0,0,2)$ $(2,4,7)$ $(0,0,0)$ $(3,24)$ $(0,0,-2)$	$(2,2,13)$ $(-2,0,0)$ $(2,7,7)$ $(-2,-2,0)$	$(1,1,8)$ $(0,0,-1)$ $(1,1)$ $(2,7)$ $(-4,0)$ $(3,12)$ $(0,0,-2)$	$(2,3,3)$ $(0,0,-2)$ $(4,5,5)$ $(-2,0,0)$	$(1,5,5)$ $(-4,0)$ $(4,7)$ $(0,-4,0)$

p	s	Δ	$\frac{p}{191}$	$\frac{s}{51}$	$\frac{\Delta}{4}$	$\frac{p}{439}$	$\frac{s}{98}$	$\frac{\Delta}{-11}$	$\frac{p}{709}$	$\frac{s}{131}$	$\frac{\Delta}{-45}$
2	0	0	191	51	4	439	98	-11	709	131	-45
3	0	0	193	37	-10	443	91	-19	719	168	-11
5	0	0	197	40	-8	449	90	-21	727	153	-28
7	1	0	199	49	0	457	88	-25	733	144	-38
11	3	1	211	44	-8	461	101	-13	739	143	-41
13	2	0	223	53	-2	463	95	-20	743	158	-27
17	4	1	227	54	-2	467	103	-13	751	151	-36
19	5	1	229	49	-7	479	119	0	757	143	-45
23	7	2	233	47	-10	487	98	-23	761	159	-30
29	7	1	239	62	3	491	109	-13	769	151	-40
31	9	2	241	51	-8	499	96	-28	773	154	-38
37	7	-1	251	64	2	503	118	-7	787	157	-39
41	11	2	257	56	-7	509	109	-17	797	161	-37
43	10	0	263	64	-1	521	111	-18	809	159	-42
47	15	4	269	61	-5	523	110	-20	811	161	-41
53	12	0	271	65	-2	541	100	-34	821	160	-44
59	18	4	277	53	-15	547	104	-32	823	159	-46
61	14	0	281	61	-8	557	109	-29	827	162	-44
67	15	-1	283	61	-9	563	124	-16	829	162	-44
71	21	4	293	64	-8	569	119	-22	839	192	-17
73	16	-1	307	66	-10	571	112	-30	853	161	-51
79	20	1	311	81	4	577	113	-30	857	169	-44
83	23	3	313	64	-13	587	124	-22	859	173	-41
89	23	2	317	61	-17	593	120	-27	863	179	-36
97	21	-2	331	67	-15	599	138	-11	877	160	-58
101	26	2	337	65	-18	601	118	-31	881	180	-39
103	27	2	347	73	-13	607	128	-23	883	166	-54
107	26	0	349	72	-14	613	117	-35	887	194	-27
109	22	-4	353	74	-13	617	115	-38	907	169	-57
113	24	-3	359	89	0	619	126	-28	911	200	-27
127	30	-1	367	82	-9	631	131	-26	919	186	-43
131	36	4	373	73	-19	641	128	-31	929	184	-47
137	29	-4	379	75	-19	643	128	-32	937	182	-51
139	33	-1	383	93	-2	647	147	-14	941	193	-41
149	34	-2	389	82	-14	653	121	-41	947	178	-58
151	36	-1	397	78	-20	659	143	-21	953	185	-52
157	34	-4	401	82	-17	661	131	-33	967	188	-53
163	33	-7	409	84	-17	673	125	-42	971	210	-32
167	45	4	419	98	-6	677	138	-30	977	182	-61
173	39	-3	421	81	-23	683	131	-39	983	211	-34
179	44	0	431	103	-4	691	137	-35	991	194	-59