

FORMENTHEORETISCHE ENTWICKELUNG DER IN HERRN WHITE'S  
 ABHANDLUNG ÜBER CURVEN DRITTER ORDNUNG  
 ENTHALTENEN SÄTZE\*

VON

PAUL GORDAN

§1. *Covarianten und Invarianten einer ternären kubischen Form.*

Die einfachsten invarianten Bildungen einer ternären kubischen Form

$$f = a_x^3$$

sind diese 10 Formen :

$$\theta = \theta_x^2 u_y^2 = (abu)^2 a_x b_x; \quad \Delta = \Delta_x^3 = a_y^2 a_x \theta_x^2; \quad s = u_s^3 = (abu)^2 a_y u_y;$$

$$H = H_x^2 u_\eta^2 = (a\Delta u)^2 a_x \Delta_x; \quad K = K_x^2 u_\kappa^2 = (\Delta\Delta_1 u)^2 \Delta_x \Delta_{1,x}; \quad t = u_t^3 = (aHu)^2 a_\eta u_\eta;$$

$$S = a_s^3; \quad T = \Delta_s^3 = a_t^3; \quad \pi = u_\pi^3 = Ts - St; \quad R = T^2 - \frac{1}{6} S^3.$$

Von den zahlreichen zwischen ihnen bestehenden Relationen erwähne ich zunächst diese 4 :

$$(1) \quad a_s^2 a_x u_s = \frac{1}{3} S \cdot u_x; \quad a_t^2 u_t a_x = \frac{1}{3} T \cdot u_x; \quad \Delta_s^2 u_s \Delta_x = \frac{1}{3} T \cdot u_x;$$

$$\Delta_t^2 u_t \Delta_x = \frac{1}{18} S^2 \cdot u_x,$$

und die 4 aus ihnen folgenden :

$$(2) \quad (\partial s x)^2 \theta_s \theta_x = \frac{2}{3} S \cdot f; \quad (x s x)^2 K_s K_x = \frac{2}{3} T \cdot s;$$

$$a_\pi^2 u_\pi a_x \equiv 0; \quad \Delta_\pi^2 \Delta_x u_\pi = R \cdot u_x.$$

§ 2. *Die Combinanten des Polarnetzes von f.*

Die Polaren  $a_x^2 a_y$  von  $f$  bilden ein Kegelschnittnetz :

$$P(f).$$

Die Hauptcombinanten sind die Elementar-Covarianten von

$$(abc) a_x^2 b_y^2 c_z^2,$$

---

\* Presented to the Society Oct. 28, 1899. Received for publication Oct. 15, 1899.

also nach der Formel

$$3(abc)a_x^2b_y^2c_z^2 = 2(xyz)\Delta_x\Delta_y\Delta_z - (sxy)(sxz)(syz)$$

die Hessische Form  $\Delta$  und die Cayley'sche Form  $s$ ; die anderen Combinanten von  $P(f)$  sind die Formen des simultanen Systems von  $\Delta$  und  $s$ . Die erste der Elementar-Covarianten von  $(abc)a_x^2b_y^2c_z^2$  ist

$$(abc)(bcu)a_y^2b_xc_x = a_s u_s a_y^2 \theta_x^2;$$

sie hat den Werth

$$(3) \quad a_s u_s a_y^2 \theta_x^2 = \frac{2}{3} u_y \Delta_x^2 \Delta_y - \frac{1}{3} u_x \Delta_x \Delta_y^2 + \frac{1}{3} u_s (sxy)^2.$$

### § 3. Apolare Netze.

In Folge der Formel

$$a_x^2 a_x u_\pi = 0$$

sind die Netze  $P(f)$  und  $P(\pi)$  apolar. Die Coefficienten-Matrices beider Netze sind korrespondirend und es besteht die Relation:

$$(\pi\pi_1\pi_2)(\pi xy)(\pi xz)(\pi_1 xz)(\pi_1 yz)(\pi_2 yz)(\pi_2 xy) = \rho(xyz)(abc)a_x^2b_y^2c_z^2;$$

sie sagt aus,  $f$  und  $\pi$  haben dieselben Haupt-Combinanten. Die Hessische Curve von  $f$  ist die Cayley'sche von  $\pi$  und die Hessische Curve von  $\pi$  die Cayley'sche von  $f$ . Die Untersuchung\* des Herrn WHITE geht dahin Curven zu finden, welche entweder die Cayley'sche oder die Hessische mit  $f$  gemein haben.

### § 4. Relationen zwischen den invarianten Bildungen von $f$ .

Die Relationen zwischen den invarianten Bildungen von  $f$  folgen im Wesentlichen aus Formel (3); ich erwähne hier nur diese 10 einfachsten:

$$(4) \quad \begin{aligned} H_s^2 \theta_x^2 u_\eta^2 &= -\frac{1}{3} K + \frac{1}{3} \Delta_s \Delta_x^2 u_s^2 + \frac{1}{9} T \cdot u_x^2; \\ a_s u_s^2 a_x^2 &= H + \frac{1}{6} S \cdot u_x^2; \\ \theta_s^2 u_s u_\eta^2 &= t; \\ \Delta_s \Delta_x^2 u_s^2 &= -\frac{1}{2} K + \frac{1}{2} S \cdot \theta + \frac{1}{6} T \cdot u_x^2; \\ K_s^2 u_s^2 u_s &= \frac{1}{2} St - \frac{1}{3} Ts; \\ \theta_s^2 u_s u_s^2 &= \frac{1}{3} Ss; \\ \theta_s &= (ss_1x)^2 u_s u_{s_1} = K + \frac{1}{2} S\theta; \\ \Delta_s &= (ss_1s_2)^2 u_s u_{s_1} u_{s_2} = St - \frac{1}{3} Ts = \frac{2}{3} Ts - \pi; \\ s_s &= (ss_1s_2)(ss_1x)(ss_2x)(s_1s_2x) = \frac{1}{3} S^2 f + \frac{2}{3} T\Delta; \\ S_s &= (ss_1s_2)(ss_1s_3)(ss_2s_3)(s_1s_2s_3) = \frac{1}{3} S^3 + \frac{2}{3} T^2. \end{aligned}$$

\* S. pag. 1 dieses Heftes.

§ 5. *Der Aronhold'sche Prozess.*

Die invarianten Bildungen des Aggregates

$$xf + \lambda \Delta$$

werden mittelst des Aronhold'schen Prozesses

$$\delta f = \Delta$$

berechnet; wendet man ihn auf die einfachsten Formen an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \delta \Delta &= \frac{1}{2} S \cdot f; & \delta s &= 3t; & \delta S &= 4T; & \delta t &= \frac{5}{6} S \cdot s; \\ \delta T &= S^2; & \delta \theta &= 2H; & \delta H &= K + \frac{1}{2} S \theta; & \delta K &= SH; & \delta R &= 0. \end{aligned}$$

§ 6. *Einige invariante Bildungen von*

$$xf + \lambda \Delta, \quad xs + \lambda t, \quad x\pi + \lambda s.$$

Die Werthe der Hessischen Form und der Cayley'schen Form von

$$xf + \lambda \Delta$$

sind bekanntlich:

$$(5) \quad \Delta_{xf+\lambda\Delta} = \frac{1}{2S} \lambda (Sx + (T + \sqrt{R})\lambda) (Sx + (T - \sqrt{R})\lambda) f + (x^3 - \frac{1}{2} Sx\lambda^2 - \frac{1}{3} T\lambda^3) \Delta;$$

$$(6) \quad s_{xf+\lambda\Delta} = 3\lambda(x - \sqrt{\frac{1}{6}} S \cdot \lambda) (x + \sqrt{\frac{1}{6}} S \cdot \lambda) t + (x^3 + \frac{1}{2} Sx\lambda^2 + \frac{2}{3} T \cdot \lambda^3) s.$$

Analoge Formeln erhält man durch Anwendung des Aronhold'schen Prozesses auf die Formeln (4):

$$\theta_{xs+\lambda t} = (x^2 - \frac{1}{6} S\lambda^2) K + (\frac{2}{3} Sx\lambda + \frac{2}{3} T\lambda^2) H + (\frac{1}{2} Sx^2 + \frac{2}{3} Tx\lambda + \frac{1}{6} S^2\lambda^2) \theta;$$

$$\theta_{x\pi+\lambda s} = (Rx^2 + 2Tx\lambda + \lambda^2) K - \frac{2}{3} S^2x\lambda \cdot H + (-\frac{1}{6} SRx^2 + \frac{1}{3} STx\lambda + \frac{1}{2} S\lambda^2) \theta;$$

$$(7) \quad \Delta_{xs+\lambda t} = (Sx + T\lambda) (x + \sqrt{\frac{1}{6}} S \cdot \lambda) (x - \sqrt{\frac{1}{6}} S \cdot \lambda) t + (-\frac{1}{3} Tx^3 + \frac{1}{6} S^2x^2\lambda + \frac{1}{2} STx\lambda^2 + (\frac{2}{9} T^2 + \frac{1}{108} S^3)\lambda^3) s;$$

$$(8) \quad \Delta_{x\pi+\lambda s} = (-\frac{1}{3} R^2x^3 + Rx\lambda^2 + \frac{2}{3} T\lambda^3) s - (Rx^2\lambda + 2Tx\lambda^2 + \lambda^3) \pi;$$

$$(9) \quad s_{x\pi+\lambda s} = \frac{1}{3} S^2\lambda (\lambda - \sqrt{R} \cdot x) (\lambda + \sqrt{R} \cdot x) f + (\frac{2}{3} R^2x^3 + 2RTx^2\lambda + 2Rx\lambda^2 + \frac{2}{3} T\lambda^3) \Delta;$$

$$(10) \quad \frac{2}{3} S_{x\pi+\lambda s} = R^3x^4 + 4R^2Tx^3\lambda + 6R^2x^2\lambda^2 + 4RTx\lambda^3 + (\frac{1}{2} S^3 + T^2)\lambda^4.$$

§ 7. *Curven, welche dieselbe Hessische und welche dieselbe Cayley'sche Curve haben.*

Die Formeln (9) und (8)

$$s_\pi = \frac{2}{3} R^2 \Delta, \quad \Delta_\pi = -\frac{1}{3} R^2 s$$

bestätigen die im § 3 gemachte Aussage, dass die Cayley'sche Curve von  $\pi$  die Hessische von  $f$  und dass die Hessische Curve von  $\pi$  die Cayley'sche von  $f$  ist.

Diejenigen Curven, welche mit  $f$  oder  $\pi$  die Cayley'sche oder die Hessische Curve gemein haben sind covariant zu  $f$  und gehören daher den Büscheln an

$$xf + \lambda\Delta, \quad xs + \lambda t \text{ resp. } x\pi + \lambda s.$$

Ihre Parameter erhält man durch das Verschwinden der Coefficienten von  $f$ ,  $t$ ,  $\pi$  in den Formeln (5) bis (9). Da dieselben kubisch sind, so giebt es von jeder Art 3 Curven, ein Curventripel. Zur Cayley'schen Curve  $s$  gehört das Tripel:

$$(11) \quad f; \quad A = \Delta + \sqrt{\frac{1}{3}S} \cdot f; \quad B = \Delta - \sqrt{\frac{1}{3}S} \cdot f;$$

zur Hessischen Curve  $\Delta$  das Tripel:

$$(12) \quad f; \quad F = S\Delta + (\sqrt{R} - T)f; \quad G = S\Delta - (\sqrt{R} + T)f;$$

zur Cayley'schen Curve  $\Delta$  das Tripel:

$$(13) \quad \pi; \quad \Phi = \pi + \sqrt{R} \cdot s; \quad \Psi = \pi - \sqrt{R} \cdot s;$$

und zur Hessischen Curve  $s$  das Tripel:

$$(14) \quad \pi; \quad A = t + \sqrt{\frac{1}{3}S} \cdot s; \quad B = t - \sqrt{\frac{1}{3}S} \cdot s.$$

### § 8. Die Formen $\Delta$ und $s$ der Tripel.

Die Cayley'schen Formen des Tripels:

$$f, \quad A, \quad B$$

haben die Werthe:

$$s_r = s; \quad s_A = \frac{2}{3}(T + \sqrt{\frac{1}{3}S^3})s; \quad s_B = \frac{2}{3}(T - \sqrt{\frac{1}{3}S^3})s;$$

die Cayley'schen des Tripels:

$$\pi, \quad \Phi, \quad \Psi$$

die Werthe:

$$s_\pi = \frac{2}{3}R^2\Delta; \quad s_\Phi = \frac{2}{3}\sqrt{R^3}(T - \sqrt{R})\Delta; \quad s_\Psi = -\frac{2}{3}\sqrt{R^3}(T + \sqrt{R})\Delta;$$

die Hessischen des Tripels:

$$f, \quad F, \quad G$$

die Werthe:

$$\Delta_f = \Delta; \quad \Delta_F = -4R(T + \sqrt{R})\Delta; \quad \Delta_G = -4R(T - \sqrt{R})\Delta;$$

und die Hessischen des Tripels:

$$\pi, \quad A, \quad B$$

die Werthe:

$$\Delta_\pi = -\frac{1}{3}R^2s; \quad \Delta_A = \frac{2}{3}(T + \sqrt{\frac{1}{3}S^3})^2s; \quad \Delta_B = \frac{2}{3}(T - \sqrt{\frac{1}{3}S^3})^2s.$$

§ 9. Die Formen  $t, T, A, B, A, B$  von  $\pi$ .

Die Formen

$$t, T, A, B, A, B$$

gebildet für die Form  $\pi$  haben die Werthe:

$$\begin{aligned} t_\pi &= -\frac{2}{9} R^3 (T\Delta - \frac{1}{6} S^2 f); & T_\pi &= -\frac{2}{9} R^4 T; \\ A_\pi &= \frac{1}{3} \sqrt{R^3} \cdot \Psi; & B_\pi &= -\frac{1}{3} \sqrt{R^3} \Phi; \\ A_\pi - &= \frac{2}{9S} R^3 (T + \sqrt{R}) F; & B_\pi - &= -\frac{2}{9S} R^3 (T - \sqrt{R}) G. \end{aligned}$$

§ 10. Apolarität der Netze  $P(A)$  und  $P(B)$ .

In Folge der Formel

$$A_x^2 A_x u_x = 0$$

sind die Netze  $P(A)$  und  $P(B)$  apolar. Die einfachsten invarianten Bildungen der Form  $A$  haben die Werthe;

$$\begin{aligned} s_A &= \frac{2}{3} (T + \sqrt{\frac{1}{6} S^3}) s; & \theta_A &= \frac{1}{6} S \theta + 2 \sqrt{\frac{1}{6} S} \cdot H + K; \\ t_A &= \frac{4}{9} S (T + \sqrt{\frac{1}{6} S^3}) t + \frac{2}{9} R s. \\ S_A &= \frac{2}{3} (T + \sqrt{\frac{1}{6} S^3})^2; & T_A &= \frac{4}{9} \sqrt{\frac{1}{6} S^3} \cdot (T + \sqrt{\frac{1}{6} S^3})^2 - \frac{2}{9} R (T + \sqrt{\frac{1}{6} S^3}); \\ \pi_A &= -\frac{8}{27} S (T + \sqrt{\frac{1}{6} S^3})^3 B. \end{aligned}$$

Die letzte Formel bestätigt die Apolarität.

§ 11. Die charakteristischen Relationen für das Tripel  $f, A, B$ .

Die zwischen  $f, A, B$ , bestehenden Relationen:

$$\begin{aligned} (abA)^2 a_x b_x A_y &= \sqrt{\frac{1}{6} S} \cdot A_x^2 A_y; \\ (AA_1 a)^2 A_x A_{1,x} a_y &= \frac{1}{3} (T + \sqrt{\frac{1}{6} S^3}) a_x^2 a_y; \\ (AA_1 B)^2 A_x A_{1,x} B_y &= -\frac{1}{3} (T + \sqrt{\frac{1}{6} S^3}) B_x^2 B_y \end{aligned}$$

charakterisiren das Tripel  $f, A, B$ . Die Formel:

$$(15) \quad (abL)^2 a_x b_x = \sqrt{\frac{1}{6} S} \cdot L_x^2$$

liefert 6 Relationen zwischen den Coefficienten des Kegelschnittes  $L$ ; 3 derselben folgen nach der Formel:

$$(abL)^2 a_x b_x u_x = \sqrt{\frac{1}{6} S} \cdot L_x^2 u_x$$

aus den andern. Das durch Formel (15) charakterisirte Kegelschnittnetz ist  $P(A)$ .