NACHTRAG ZUM ARTIKEL: „ZUR ERKLÄRUNG DER BOGENLÄNGE U. S. W." (DIESES BANDES, S. 23 F.)*

VON

O. STOLZ

Den Lesern dieses Aufsatzes dürfte es nicht unwillkommen sein, wenn ich meine Darstellung der Lehre von der Rectification der Curven mit C. JORDAN's Darstellung derselben † vergleiche.

JORDAN geht von der nämlichen Erklärung der Länge des Bogens

$$(1) \qquad x = \phi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta),$$

aus, wie ich S. 26. Dann bemerkt er zunächst, dass, wenn die Summe

$$(2) \qquad \sum_{r=1}^{n} |A_{r-1}A_r|,$$

bei $\lim \delta_r = 0 \, (r = 1, \cdots, n)$ überhaupt einen endlichen Grenzwerth L hat, dieser *die obere Grenze ist für die Summen* (2) *bei willkürlicher Annahme der Theile* δ_r, *deren Summe jedoch stets* $\beta - \alpha$ *sein muss.* Dieser auch für uns wünschenswerthe Satz ergiebt sich folgendermaassen. Angenommen jene Grenze sei G. Auch wenn alle Theile δ_r kleiner als die S. 26 angegebene Zahl Δ sind, lässt sich die Summe (2) noch vergrössern. Also ist G auch die obere Grenze für die Summen (2) unter der Voraussetzung, dass ein jedes δ_r kleiner ist als Δ. Nun ist nach (b) S. 26 unter dieser Bedingung

$$(3) \qquad -\epsilon < L - \sum_{r=1}^{n} |A_{r-1}A_r| < \epsilon.$$

Da aber

$$\sum_{r=1}^{n} |A_{r-1}A_r| < G$$

sein soll, so muss $L - \epsilon < G$ oder $L - G < \epsilon$ sein. Hieraus ergiebt sich bei der Willkürlichkeit der positiven Zahl ϵ, dass

$$(4) \qquad L \leqq G$$

* Presented to the Society (Chicago) March 29, 1902. Received for publication February 25, 1902.

† Vgl. *Cours d'Analyse*, 2. éd., t. I, Nr. 105–111 (in der Hauptsache schon bei L. SCHEEFFER, Acta Mathematica, t. 5. S. 54).

ist. Unter den in (3) vorkommenden Summen giebt es mindestens eine

$$\sum_{r=1}^{n'} |A'_{r-1} A'_r| > G - \epsilon.$$

Demnach ist

$$L + \epsilon > G - \epsilon, \quad \text{d. i.,} \quad 2\epsilon > G - L,$$

so dass $G \leqq L$ sein muss. Aus dieser und der Beziehung (4) folgt die Gleichung $G = L$.

Wir finden weiter bei JORDAN die *nothwendige und hinreichende* Bedingung dazu, dass für den Bogen (1) ein endlicher Grenzwerth L vorhanden ist. Sie lautet: 1) $\phi(t)$ und $\psi(t)$ müssen Functionen mit endlicher Totaländerung (à variation bornée) im Intervalle (α, β) sein; 2) der Punkt $\big(\phi(t), \psi(t)\big)$ muss auf der geraden Strecke liegen, welche die Punkte

$$\big(\phi(t-0), \psi(t-0)\big), \quad \big(\phi(t+0), \psi(t+0)\big)$$

verbindet.

Hierauf stellt er den Satz auf: „Dazu dass der Bogen s zwischen den den Werthen a und t entsprechenden Punkten der Curve (1) eine stetige Function von t ist, ist nothwendig und hinreichend, dass die Functionen $\phi(t)$ und $\psi(t)$ bei diesem Werthe t stetig seien.“

Dann folgt bei JORDAN der Satz: „Haben die Functionen $\phi(t)$, $\psi(t)$ bei einem Werthe t stetige Differentialquotienten $\phi'(t)$, $\psi'(t)$, so ist

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}. \text{“} \tag{5}$$

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass der Bogen der Curve (1), welches dem den Werth t enthaltenden Intervalle (α, β) entspricht, eine Länge besitze.

Unter welchen Umständen hat nun dieser Bogen im Falle, dass *beide Functionen $\phi(t)$, $\psi(t)$ im Intervalle (α, β) von t durchweg stetig sind*, eine Länge? Nach dem soeben Bemerkten dann und nur dann, wenn der Gesammtbetrag der Änderung jeder von ihnen im Intervalle (α, β) endlich ist. Dies findet statt,* wenn

(1) die beiden Functionen im Intervalle (α, β) *abtheilungsweise monoton*† d. h. in jedem von gewissen, in endlicher Anzahl vorhandenen Theilen, welche zusammen das Intervall (α, β) ausmachen, monoton sind;

(2) $\phi'(t)$ und $\psi'(t)$ entweder im Intervalle (α, β) von t durchweg stetig sind oder dieses so in eine endliche Anzahl von Theile zerlegt werden kann, dass in jedem von ihnen sowohl $\phi'(t)$, als auch $\psi'(t)$ durchweg stetig ist (vgl. Nr. 7).

---

* Darauf geht JORDAN, a. a. O. nicht ein.

† Nach C. NEUMANN, *Über die nach Kreis- Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen* (1881), S. 26.

Fassen wir zunächst den zweiten Fall in's Auge, so können wir nunmehr aus der Formel (5) unmittelbar die Sätze in Nr. 6 und Nr. 10 ableiten.

Nehmen wir jetzt an, dass die Differentialquotienten $\phi'(t)$, $\psi'(t)$ in jedem Intervalle (α, t'), wo $\alpha < t' < \beta$ ist, durchweg stetig, jedoch mindestens einer von ihnen im ganzen Intervalle (α, β) nicht endlich sei. Haben dann die Gleichungen

$$\phi'(t) = 0, \quad \psi'(t) \doteq 0$$

im Intervalle (α, β) nur eine bestimmte Anzahl von Wurzeln, so sind die Functionen $\phi(t)$, $\psi(t)$ darin abtheilungsweise monoton. Bedeuten A, B, T' die den Werthen $t = \alpha, \beta, t'$ entsprechenden Punkte der Curve (1), so haben die Bogen AT' und AB mithin eine Länge. Und zwar ist nach dem Vorstehenden

$$s' = \operatorname{arc} AT' = \int_\alpha^{t'} \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt. \tag{6}$$

Da nun $\operatorname{arc} AB = \underset{t'=\beta}{\mathrm{L}} \operatorname{arc} AT'$ ist, so finden wir aus (6)

$$\operatorname{arc} AB = \underset{t'=\beta}{\mathrm{L}} \int_\alpha^{t'} \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt = \int_\alpha^{\beta} \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt, \tag{7}$$

dass also das letzte, *uneigentliche Integral vorhanden ist.* Wenn dasselbe durch eine passende Substitution für t sich in ein eigentliches Integral überführen lässt, so ergiebt sich die Formel (7) auch aus dem Satze in Nr. 6.

Eine ähnliche Bemerkung kann man im Falle machen, dass das Intervall (α, β) in eine endliche Anzahl von Theilen zerfällt, in deren jedem $\phi'(t)$, $\psi'(t)$ sich so verhalten, wie gerade angegeben wurde.

Für den Inhalt einer windschiefen Fläche hat JORDAN, wie er in der Vorrede zum I. B. seines Cours selbst sagt, keine befriedigende Erklärung aufgestellt.