SUR LES OPÉRATIONS LINÉAIRES*

(TROISIÈME NOTE†)

PAR

MAURICE FRÉCHET

Définition du champ. Considérons un champ de fonctions de la variable x définies dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Je supposerai que si deux fonctions appartiennent au champ, il en est de même de leur somme. A toute fonction du champ, $f(x)$, nous pourrons faire correspondre un nombre bien déterminé U_f. Nous définirons ainsi une opération dans ce champ de fonctions. Nous dirons que cette opération est *distributive*, si quelles que soient les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ du champ, on a :

$$U_{f_1} + U_{f_2} = U_{f_1+f_2}.$$

On en conclut en particulier que l'on a pour toute opération distributive :

$$cU_f = U_{cf} \tag{1}$$

quelle que soit la constante rationnelle c. Pour que cette relation ait lieu même pour c irrationnel, il suffit que U_f satisfasse à une certaine condition complémentaire. Nous allons énoncer plus loin cette condition complémentaire, mais nous l'énoncerons d'une manière particulière pour chacun des champs de fonctions que nous allons examiner.

§ 1. *Opérations linéaires dans le champ (M) des fonctions mesurables et bornées.*

Définition. Supposons qu'une opération U_f soit définie pour toute fonction $f(x)$ mesurable‡ et bornée dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Nous dirons que cette opération est *continue* dans (M), si l'on a :

$$U_f = \lim_{n=\infty} U_{f_n},$$

lorsque $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$ sont des fonctions du champ (M) qui sont bornées dans leur ensemble et que $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ sauf peut être en un

* Presented to the Society September 6, 1907. Received for publication March 8, 1907.

† Voir Transactions of the American Mathematical Society, vol. 5 (1904), pp. 493–499 et vol. 6 (1905), pp. 134–140.

‡ Voir les *Leçons sur les séries trigonométriques* par H. LEBESGUE, p. 8.

ensemble de valeurs de x de mesure nulle. Nous appellerons opération *linéaire* toute opération distributive et continue. Pour une telle opération l'égalité (1) aura évidemment lieu quelle que soit la constante c.

Il est facile de donner des exemples d'opérations linéaires dans le champ (M). Telle est par exemple l'opération :

$$U_f = \int_0^{2\pi} f(x)h(x)\,dx,$$

où $h(x)$ est une fonction mesurable et bornée choisie une fois pour toutes.* Au contraire l'opération distributive $U_f = f(\pi)$ par exemple n'est pas continue à notre sens actuel.

Inversement, étant donnée de façon quelconque une opération linéaire dans le champ (M), nous allons chercher à en donner une expression analytique. Pour cela, nous nous appuierons sur quelques résultats de la théorie des séries trigonométriques.

1°. Toute fonction $f(x)$ mesurable et bornée a une série de Fourier bien déterminée, ce que l'on exprime par la notation symbolique :

$$(2)\quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + (a_p \cos px + b_p \sin px) + \cdots.$$

Cette notation qui n'implique nullement l'égalité des deux membres est équivalente aux relations :

$$(2)\qquad a_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\cos py\,dy, \quad b_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\sin py\,dy \quad (p = 0, 1, 2, \cdots).$$

2°. En utilisant les sommes de Fejer :

$$(3)\quad \sigma_n(x) \equiv \frac{\frac{na_0}{2} + \cdots + (n-p)(a_p \cos px + b_p \sin px) + \cdots + [a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x]}{n},$$

on sait qu'on a pour toute fonction $f(x)$ mesurable et bornée de 0 à 2π :

$$(4)\qquad f(x) = \lim_{n=\infty} \sigma_n(x),$$

sauf peut être pour un ensemble de valeurs de x de mesure nulle.†
De plus, la quantité $\sigma_n(x)$ reste comprise quels que soient n et x entre les limites supérieure et inférieure de $f(x)$.‡

* Lebesgue, loc. cit., p. 10, 14.

† Loc. cit., p. 92, 96.

‡ Loc. cit., p. 98.

3°. En appelant $s_n(x)$ la somme des $n+1$ premiers termes de la série de Fourier, on sait même que si $f(x)$ est une fonction à variation bornée * dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, on a:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} s_n(x), \tag{5}$$

sauf peut être en un ensemble de valeurs de x de mesure nulle.† De plus la quantité $s_n(x)$ est comprise entre deux nombres fixes quels que soient n et x.‡

Développement de U_f. Appliquons l'opération U_f aux deux membres de l'égalité (3). On aura:

$$U_f = \lim_{n=\infty} \left[\frac{n\frac{a_0 u_0}{2\pi} + \cdots + (n-p)p(a_p v_p - b_p u_p) + \cdots + (n-1)(a_{n-1}v_{n-1} - b_{n-1}u_{n-1})}{n} \right] \tag{6}$$

en posant:

$$\frac{u_0}{\pi} = U_1, \qquad u_p = -\frac{1}{p} U_{\sin px}, \qquad v_p = \frac{1}{p} U_{\cos px} \quad (p = 1, 2, \cdots). \tag{7}$$

On pourra écrire la formule (6) plus simplement en mettant d'une façon générale une relation telle que:

$$\lambda = \lim_{n=\infty} \frac{n\alpha_0 + \cdots + (n-p)\alpha_p + \cdots + \alpha_{n-1}}{n}$$

sous la forme:

$$\lambda \doteq \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \cdots.$$

On voit alors que *pour toute fonction $f(x)$ mesurable et bornée déterminée par* (1), *on a:*

$$U_f \doteq \frac{a_0 u_0}{2\pi} + (a_1 v_1 - b_1 u_1) + \cdots + p(a_p v_p - b_p u_p) + \cdots, \tag{8}$$

où $u_0, u_1, v_1, \cdots$ sont des constantes indépendantes de la fonction $f(x)$ et déterminées par les formules (7). De plus lorsque $f(x)$ est une fonction à variation bornée, on peut remplacer dans le développement (8) le signe $\doteq$ par le signe $=$.

Une propriété importante de ce développement est *d'être unique.* D'une façon plus précise, si l'on obtient par un moyen quelconque la formule:

$$U_f \doteq \frac{a_0 u_0'}{2\pi} + \cdots + p(a_p v_p' - b_p u_p') + \cdots, \tag{9}$$

* Loc. cit., p. 3.

† Loc. cit., p. 73.

‡ M. Fatou a bien voulu me faire savoir qu'on peut obtenir cette propriété en appliquant l'analyse classique de Dirichlet à une différence de fonctions positives non croissantes.

où les u', v' sont des constantes indépendantes de $f(x)$, ces constantes doivent respectivement coïncider avec les u, v. Il suffit pour s'en assurer d'appliquer l'expression (9) au cas où $f(x)$ est l'une des fonctions 1, $\cos px$, $\sin px$, en tenant compte de (7).

Signification des coefficients u_p, v_p. Nous allons montrer que les coefficients $u_0, u_1, v_1, \cdots$ ne peuvent être pris arbitrairement quand l'opération U_f n'est pas déterminée. Pour cela, appelons $\phi_{x_0}(x)$ la fonction qui est égale à $(x-x_0)/2+\pi$ pour $0 \leqq x < x_0$, à $\pi/2$ pour $x = x_0$ et à $(x-x_0)/2$ pour $x_0 < x \leqq 2\pi$. C'est une fonction à variation bornée qui a pour série de Fourier:

$$\frac{\pi}{2} + (\sin x_0 \cos x - \cos x_0 \sin x) + \cdots + \left(\frac{\sin px_0 \cos px - \cos px_0 \sin px}{p}\right) + \cdots.$$

On a donc d'après ce qui précède:

$$U_{\phi_{x_0}(x)} = \frac{u_0}{2} + (u_1 \cos x_0 + v_1 \sin x_0) + \cdots + (u_p \cos px_0 + v_p \sin px_0) + \cdots,$$

ce qui exige d'abord que les quantités u, v soient telles que le second membre soit une série convergente. La somme de cette série est une certaine fonction de x_0, soit $u(x_0)$. Je dis que cette fonction est continue. En effet, on a:

$$u(x_0') - u(x_0) = U_{[\phi_{x_0'}(x) - \phi_{x_0}(x)]}.$$

Il suffit donc de montrer que lorsque x_0' tend vers x_0, la fonction $\phi_{x_0'}(x) - \phi_{x_0}(x)$ (qui reste comprise entre -2π et $+2\pi$ quels que soient x, x_0, x_0') tend vers zéro sauf peut être en un ensemble de valeurs de x de mesure nulle. Or cela est évident, d'après la définition de $\phi_{x_0}(x)$. Ainsi la série:

$$(10) \qquad u(x) = \frac{u_0}{2} + (u_1 \cos x + v_1 \sin x) + \cdots + (u_p \cos px + v_p \sin px) + \cdots$$

représente une fonction continue. Par suite, les quantités u, v sont les coefficients de FOURIER de cette fonction* qui est aussi de période 2π. En résumé, *les coefficients* $u_0, u_1, v_1, \cdots$ *du développement* (8) *d'une opération linéaire sont les coefficients de Fourier d'une certaine fonction continue et de période* 2π, $u(x)$. Cette fonction $u(x)$ est déterminée connaissant l'opération U_f par la formule:

$$u(x_0) = U_{\phi_{x_0}(x)}.$$

Représentation de U_f comme limite d'une intégrale double. Réciproquement, pour exprimer U_f connaissant la fonction $u(x)$ il suffit de remplacer dans la formule (8) les u, v, a, b par leurs expressions comme coefficients de Fourier de $u(x)$ et $f(x)$. Par suite *à toute opération linéaire dans le champ* (M)

* Loc. cit., p. 124.

correspond une fonction continue et de période 2π, $u(x)$, *déterminée par la formule:*

$$(11) \qquad u(x_0) = U_{\phi_{x_0}(x)},$$

telle que l'on puisse mettre U_f *sous la forme:*

$$(12) \qquad U_f = \lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) u(y) \theta_n(y-x)\, dx dy,$$

où les fonctions $\theta_n(y-x)$ *sont parfaitement déterminées indépendamment de la fonction* $f(x)$ *et de l' opération* U_f *par la formule:*

$$(13) \quad \theta_n(y) = \frac{\frac{n}{2\pi} + (n-1)\sin y + \cdots + p(n-p)\sin py + \cdots + (n-1)\sin(n-1)y}{n\pi^2}.$$

Dans le cas où $f(x)$ est à variation bornée, on peut remplacer les $\theta_n(y)$ par les fonctions plus simples:

$$(14) \quad \psi_n(y) = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{2\pi} + \sin y + \cdots + p \sin py + \cdots + (n-1)\sin(n-1)y\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi^3} + \frac{n \sin(n-1)y - (n-1)\sin ny}{4\pi^2 \sin^2 \frac{y}{2}}.$$

La représentation (12) *de l'opération* U_f *est unique.* Autrement dit, si l'on peut former par un moyen quelconque une fonction continue $v(y)$ telle que l'on ait quelle que soit la fonction $f(x)$:

$$(15) \qquad U_f = \lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) v(y) \theta_n(y-x)\, dx dy,$$

on a nécessairement $v(y) \equiv u(y)$. En effet, il suffit d' appliquer les formules (12) et (15) pour $f(x) \equiv 1$, $\cos px$, $\sin px$ pour voir que $v(y)$ et $u(y)$ ont les mêmes séries de Fourier.*

Etude de la fonction génératrice. Ainsi à toute opération U_f linéaire dans le champ (M) correspond une fonction continue bien déterminée $u(y)$ et réciproquement si l'on connait $u(y)$ l'opération U_f est exprimée par la formule (12). Nous pouvons donc dire que la fonction $u(y)$ est *la fonction génératrice de* U_f. Il est manifeste que les propriétés de l'opération U_f doivent se refléter dans celles de la fonction continue $u(y)$; de sorte que l'étude de l'opération U_f est ramenée à l'étude d'une fonction continue: sa fonction génératrice. Un premier résultat de cette méthode sera donné par le théorème suivant:

* Loc. cit., p. 37.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une opération U_f linéaire dans le champ (M) soit de la forme:

$$U_f = \int_0^{2\pi} f(x) h(x) dx, \tag{16}$$

où $h(x)$ est une fonction mesurable et bornée, est que la fonction génératrice de U_f soit une fonction continue de période 2π qui puisse être considérée comme l'intégrale indéfinie d'une fonction sommable et bornée.

1°. La condition est nécessaire. En effet, si U_f est de la forme (16), sa fonction génératrice est:

$$u(y) = U_{\phi_y(x)} = \int_0^{2\pi} h(x)\phi_y(x) dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{x-y}{2}\right) h(x) dx + \pi \int_0^y h(x) dx$$

d'après la définition de $\phi_y(x)$. On a donc:

$$u(y) = \pi H(y) - \frac{y}{2}[H(2\pi) - H(0)] + M,$$

en posant:

$$H(y) = \int_0^y h(x) dx, \qquad M = \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} h(x) dx.$$

Par conséquent, on a bien $u(2\pi) = u(0)$ et $u(y)$ est l'intégrale indéfinie de la fonction mesurable et bornée:

$$\pi h(y) - \frac{H(2\pi) - H(0)}{2}.$$

2°. La condition est suffisante. En effet, supposons:

$$u(y) = \int k(y) dy, \qquad u(2\pi) = u(0),$$

$k(y)$ étant une fonction mesurable et bornée. Ecrivons la série de Fourier de $k(y)$:

$$k(y) \sim (A_1 \cos y + B_1 \sin y) + \cdots + (A_n \cos ny + B_n \sin ny) + \cdots,$$

où le terme constant s'annule puisque $u(y)$ est de période 2π. Si l'on calcule maintenant les coefficients de Fourier de $u(y)$ en fonction de ceux de $k(y)$, on trouve:

$$u(y) \sim \frac{A_0}{2} + (-B_1 \cos y + A_1 \sin y) + \cdots + \left(\frac{-B_n \cos ny + A_n \sin ny}{n}\right) + \cdots.$$

D'où:

$$\int_0^{2\pi} u(y)\theta_n(y-x) = \frac{1}{\pi n}\left\{\frac{n}{2\pi}A_0 + \cdots + (n-p)(A_p \cos px + B_p \sin px) + \cdots \right.$$
$$\left. + [A_{n-1}\cos(n-1)x + B_{n-1}\sin(n-1)x]\right\}.$$

La formule (12) s'écrit donc:

$$(17) \qquad U_f = \lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \Sigma_n(x)\, dx$$

avec:

$$\Sigma_n(x) = \frac{1}{\pi n}\left\{ \frac{n}{2\pi} A_0 + \cdots + (n-p)(A_p \cos px + B_p \sin px) + \cdots \right.$$
$$\left. + \left[A_{n-1} \cos(n-1)x + B_{n-1} \sin(n-1)x \right] \right\}.$$

Or on sait que cette quantité tend vers

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{A_0}{2\pi} + k(y) \right)$$

sauf peut être pour un ensemble de valeurs de x de mesure nulle et de plus qu'elle reste bornée comme sa limite. Par suite,* on peut écrire la formule (17):

$$U_f = \int_0^{2\pi} f(x) h(x)\, dx,$$

en appelant $h(x)$ la fonction mesurable et bornée:

$$h(x) \equiv \frac{1}{\pi}\left[\frac{A_0}{2\pi} + k(y) \right].$$

§ 2. *Opérations linéaires dans le champ* (Ω) *des fonctions sommables et de carrés sommables.*

On peut arriver à un résultat plus précis en employant la notion de *convergence en moyenne* introduite par M. Riesz † et M. Fischer ‡ dans le champ (Ω) des fonctions sommables et de carrés sommables. On dira que $f_n(x)$ converge en moyenne vers $f(x)$ et l'on écrira:

$$f(x) \sim \lim f_n(x)$$

si $f(x)$ et $f_n(x)$ sont des fonctions de (Ω) telles que l'intégrale:

$$\int_0^{2\pi} [f_n(x) - f(x)]^2\, dx$$

tende vers zéro avec $1/n$. Nous dirons alors qu'une opération U_f est continue dans le champ Ω si U_{f_n} tend vers U_f quand $f_n(x)$ converge en moyenne vers $f(x)$.

Théorème. A toute opération U_f linéaire dans le champ (Ω), on peut faire correspondre une fonction $k(x)$ du même champ, telle que l'on ait:

$$(16) \qquad U_f = \int_0^{2\pi} f(x) k(x)\, dx.$$

* Loc. cit., pp. 14, 15.

† Comptes Rendus, du 12 Nov., 1906; 18 Mars, et 8 Avril, 1907.

‡ Comptes Rendus, du 13 et 27 Mai, 1907.

En effet, on voit facilement qu'avec les notations (2) on a:

$$f(x) \sim \lim_{n=\infty} \left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \cdots + b_n \sin nx \right).$$

Donc:

$$(8') \qquad U_f = \pi \left(\frac{a_0 \alpha_0}{2} + (a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1) + \cdots + (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) + \cdots \right)$$

si l'on pose:

$$\pi \alpha_0 = U_1, \cdots, \qquad \pi \alpha_n = U_{\cos nx}, \qquad \pi \beta_n = U_{\sin nx}, \cdots.$$

Or d'après un théorème de M. RIESZ* la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction du champ Ω, $k(x)$, telle que:

$$k(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \cdots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx + \cdots$$

est que la série $\sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$ converge. D'autre part si $u(x)$ et $k(x)$ sont des fonctions de Ω, on sait d'apres M. FATOU que l'on a:

$$\int_0^{2\pi} f(x) k(x) dx = \pi \left(\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \cdots + (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) + \cdots \right).$$

Notre théorème sera donc démontré si nous prouvons que la série $\sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$ converge. Mais, d'après la définition de U_f, la série $\sum (a_n \alpha_n + b_n \beta_n)$ doit être convergente toutes les fois que l'on peut écrire les a_n, b_n sous la forme (2), $f(x)$ étant une fonction de (Ω), c'est à dire toutes les fois que $\sum (a_n^2 + b_n^2)$ converge. Or si $\sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$ ne convergeait pas, il faudrait que l'une des séries $\sum \alpha_n^2$, $\sum \beta_n^2$ diverge. Supposons par exemple que $\sum \beta_n^2$ diverge; on sait alors † qu'en posant $s_n = \beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2$, la série $\sum (\beta_n^2 / s_n)$ converge et la série $\sum (\beta_n^2 / \sqrt{s_n})$ diverge. Donc si l'on posait:

$$\phi(x) \sim \frac{\beta_2}{\sqrt{s_1}} \sin x + \cdots + \frac{\beta_n}{\sqrt{s_n}} \sin nx + \cdots,$$

on voit que la formule (8)′ ne s'appliquerait plus quoique $f(x)$ soit une fonction de (Ω). On arrive donc à une contradiction, ce qui démontre le théorème.

Inversement, on voit facilement que si $k(x)$ désigne une fonction *quelconque* de (Ω), la formule (16) définit une opération linéaire dans (Ω). En effet, elle

---

* Loc. cit.

† Encyclopédie des sciences mathématiques, vol. 1, p. 224, No. 7.

M. PRINGSHEIM a bien voulu me faire remarquer l'usage de cette propriété pour démontrer la propriété suivante utilisée ici:

Si la série $\sum \beta_n v_n$ converge quand les v_n restant fixes, les β_n sont des nombres quelconques tels que $\sum \beta_n^2$ converge, la série $\sum v_n^2$ est nécessairement convergente.

est évidemment distributive; d'autre part si f et f_n sont des fonctions quelconques de (Ω), on aura

$$(U_f - U_{f_n})^2 = \left(\int_0^{2\pi} (f - f_n) k(x) dx\right)^2 \leqq \int_0^{2\pi} k^2 dx \cdot \int_0^{2\pi} (f - f_n)^2 dx.$$

Donc si $f_n(x)$ converge en moyenne vers $f(x)$, U_{f_n} tend vers U_f.

§ 3. *Opérations linéaires dans le champ des fonctions continues.*

Définition. Nous distinguerons plusieurs cas selon que l'opération est définie dans tout le champ des fonctions continues de 0 à 2π ou bien dans le champ C_n des fonctions ayant n dérivées continues ou bien dans le champ C_ω des fonctions indéfiniment dérivables de 0 à 2π ou enfin dans le champ E des fonctions holomorphes de 0 à 2π. Enfin nous appellerons respectivement C', C'_n, C'_ω, E' le champ de celles des fonctions de C, C_n, C_ω ou E qui sont de période 2π ainsi que leurs dérivées.

Nous dirons alors avec M. HADAMARD que deux fonctions ont un voisinage d'ordre n défini par le nombre ϵ quand, de 0 à 2π, ces fonctions et leurs n premières dérivées diffèrent en valeur absolue de moins de ϵ (n pouvant être nul, entier ou infini). Cela étant, une opération U_f définie dans l'un des champs C, C_n, C_ω ou E s'appellera opération *continue* si $U_f - U_{f_p}$ est infiniment petit en même temps que le voisinage (d'ordre 0, n, ∞, ∞ respectivement) de $f(x)$ et de $f_p(x)$. Une opération distributive et continue sera dite *linéaire* et dans tous les cas l'égalité (1) sera vérifiée même pour c irrationnel.

Montrons d'abord que l'on peut ramener la considération de chacun de ces champs à celle des champs E' et E'_ω.

Supposons une opération U_f définie dans le champ C_n; on pourra représenter toute fonction de ce champ sous la forme:

$$f(x) = f(0) + x f'_0 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f_0^{(n-1)} + \int_0^x \cdots \int_0^x f_x^{(n)} (dx)^n.$$

On aura donc:

$$U_f = A_0 f(0) + A_1 f'_0 + \cdots + A_{n-1} f_0^{(n-1)} + V_{f_x^{(n)}},$$

$A_0, \cdots, A_{n-1}$ étant des constantes indépendantes de la fonction $f(x)$ et $V_{\phi(x)}$ une opération linéaire dans le champ des fonctions continues $\phi(x)$.

Soit $V_{\phi(x)}$ une opération linéaire quelconque dans le champ C des fonctions continues. Si l'on pose:

$$\psi(x) \equiv f(x) + x\left[\frac{f(0) - f(2\pi)}{2\pi}\right],$$

la fonction $\psi(x)$ est continue et de période 2π. On a donc:

$$V_f = B[f(0) - f(2\pi)] + W_{\psi(x)},$$

B étant une constante et $W_{\psi(x)}$ une opération linéaire définie dans le champ C' des fonctions continues et de période 2π.

Enfin si $f(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable, on peut trouver une fonction $g(x)$ représentable par un développement de Taylor uniformément convergent et telle que $f(x) - g(x) \equiv h(x)$ soit une fonction admettant une infinité de dérivées toutes de période 2π comme $h(x)$. Si donc U est une opération définie dans le champ C_ω, on peut écrire:

$$U_f = U_{g(x)} + U_{h(x)}.$$

Or, on a:

$$g(x) = g(\pi) + (x-\pi)g'_\pi + \cdots + \frac{(x-\pi)^n}{n!} g^{(n)}(\pi) + \cdots.$$

On a donc:

$$U_g = m_0 g(\pi) + \cdots + m_n g^{(n)}(\pi) + \cdots,$$

$m_0, \cdots, m_n$ étant des constantes indépendantes de la fonction $g(x)$. En résumé tous les cas examinés se ramènent à celui où le champ est C' ou C'_ω.

Fonction génératrice. Soit U_f une opération linéaire définie dans l'un des champs C, C_n, C_ω, E, C', C'_n, C'_ω, E'. Tous ces champs contiennent les fonctions:

$$\tfrac{1}{2} + r\cos x + \cdots + r^p \cos px,$$

$$r\sin x + \cdots + r^p \sin px,$$

quels que soient l'entier p et le nombre r compris entre -1 et $+1$. Ils contiennent aussi leurs limites quand n tend vers l'infini; et le voisinage d'ordre *infini* de ces fonctions avec leurs limites tend vers zéro.

En leur appliquant l'opération U_f, on voit en posant:

$$2\lambda_0 = U_1, \cdots, \qquad \lambda_n = U_{\cos nx}, \qquad \mu_n = U_{\sin nx}, \cdots,$$

que les deux séries:

$$\lambda_0 + \lambda_1 r + \cdots + \lambda_n r^n + \cdots,$$

$$\mu_1 r + \cdots + \mu_n r^n + \cdots,$$

soient convergentes pour $|r| < 1$. Par conséquent la série:

$$\kappa(z) = \lambda_0 + (\lambda_1 + i\mu_1)z + \cdots + (\lambda_n + i\mu_n)z^n + \cdots$$

converge et représente une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ du plan complexe des z.

Ainsi, à l'opération linéaire U_f correspond une fonction holomorphe dans S et bien déterminée: $\kappa(z)$. C'est ce que j'appellerai *la fonction génératrice* de

U_f*. Pour légitimer cette définition, je montrerai que l'on peut exprimer une opération linéaire au moyen de sa fonction génératrice.

En effet, d'après ce que nous avons vu plus haut, on peut se borner au cas des fonctions qui sont de période 2π ainsi que leurs dérivées éventuelles. On peut considérer une telle fonction $f(x)$ comme la valeur pour $r = 1$ d'une fonction $F(r, x)$ harmonique et régulière en tout point de coordonnées polaires x et $r < 1$. Si $a_0, a_1, b_1, \cdots$ sont les coefficients de Fourier de $f(x)$, on aura:

$$F(r, x) = \frac{a_0}{2} + r(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + r^n(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots.$$

D'où:

$$U_F = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot [\lambda_0 + \cdots + r^n(\lambda_n \cos nx + \mu_n \sin nx) + \cdots] \, dx,$$

ou:

$$U_F = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) P [\kappa(re^{-ix})] \, dx,$$

en désignant d'une manière générale par $P(A + iB)$ la partie réelle A de tout nombre imaginaire $A + iB$.

Si maintenant on fait tendre r vers 1 par valeurs plus petites, on voit qu'en définitive, *U_f sera déterminée par sa fonction génératrice au moyen de la formule:*

$$U_f = \lim_{r=1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot P [\kappa(re^{-ix})] \, dx, \tag{19}$$

ou:

$$U_f = \lim_{r=1} P \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \kappa(re^{-ix}) \right\} dx.$$

D'ailleurs, inversement il est très facile d'exprimer la fonction génératrice connaissant U. En effet, on a:

$$P\kappa(re^{i\phi}) = \lambda_0 + \cdots + r^n(\lambda_n \cos n\phi - \mu_n \sin n\phi) + \cdots = U_{\frac{1}{2} + \ldots + r^n \cos n(\phi - x) + \ldots}.$$

D'où:

$$P\kappa(z) = U_{P 1 \frac{1}{2} \left[\frac{1 + ze^{ix}}{1 - ze^{ix}} \right]}.$$

En définitive, on a:

$$\kappa(z) = U_{P 1 \frac{1}{2} \left[\frac{1 + e^{ix}z}{1 - e^{ix}z} \right]} - i U_{P \frac{i}{2} \left[\frac{1 + ze^{ix}}{1 - ze^{ix}} \right]}.$$

Si $\kappa(z)$ est la fonction génératrice d'une opération linéaire dans l'un des champs C', C'_n, C'_ω, cette opération peut s'exprimer sous la forme (19). Mais

* Il ne peut y avoir de confusion dans ce qui suit entre les deux définitions non équivalentes que j'ai données dans des cas distincts pour la fonction génératrice.

il est important de remarquer que même *si l' on se donne a priori pour* $\kappa(z)$ *une fonction holomorphe quelconque dans le cercle* S, *la formule* (19) *définit une opération linéaire au moins dans un certain champ.* En effet, elle donne une valeur bien déterminée de U_f lorsque f est une fonction du champ D_ρ des fonctions $f(x)$ telles que la fonction harmonique correspondante $F(r, x)$ soit régulière même pour $1 < r < \rho$. Car, en prenant: $1 < \rho_1 < \rho$ et appliquant la formule (19) à:

$$F(r, x) = \frac{a_0}{2} + \cdots + \left(\frac{r}{\rho_1}\right)^n \rho_1^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots;$$

on trouve l'expression:

$$U_f = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\rho_1, x) P\kappa\left(\frac{e^{-ix}}{\rho_1}\right) dx.$$

De plus cette opération est bien distributive et continue.

Mais, selon les propriétés de la fonction $\kappa(z)$, il peut arriver que la formule (19) donne pour U_f une opération linéaire définie dans un champ plus ou moins grand.

On sait que la fonction $\kappa(z)$ est holomorphe dans le cercle S. Il est donc à prévoir que les circonstances les plus importantes dépendront des singularités de $\kappa(z)$ sur le contour de S.

Effet des singularités de $\kappa(z)$. 1°. On est donc amené à considérer d'abord le cas où $\kappa(z)$ est holomorphe dans un cercle de rayon supérieur à 1. Dans ce cas la partie réelle, $k(x)$, de $\kappa(z)$ sur le cercle S est une fonction continue de x et on a:

$$\kappa(z) = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} k(-x)\, \frac{1 + ze^{ix}}{1 - ze^{ix}}\, dx.$$

Remarquons que cette formule détermine une fonction $\kappa(z)$ holomorphe dans S dans le cas général où $k(x)$ est une fonction mesurable et bornée quelconque et arrêtons nous à ce cas général. En introduisant cette expression de $\kappa(z)$ dans la formule (19), il est facile de voir que l'opération U_f sera définie même dans tout le champ (M) sous la forme:

$$U_f = \int_0^{2\pi} f(x) k(x)\, dx.$$

2°. Supposons que la fonction $\kappa(z)$ n'ait sur S qu'un nombre fini de points singuliers et que ces points singuliers soient des pôles. Alors on pourra mettre $\kappa(z)$ sous la forme:

$$\kappa(z) = H(z) + \sum_{p=1}^{p=m}\left\{ A_0^{(p)}\left(\frac{1 + ze^{iq_p}}{1 - ze^{iq_p}}\right) + \cdots + A_{n_p}^{(p)} D_{q_p}^{(n_p)}\left(\frac{1 + ze^{iq_p}}{1 - ze^{iq_p}}\right)\right\},$$

où $H(z)$ est une fonction holomorphe au delà de S, où les quantités $A_s^{(p)}$ sont des constantes et où on désigne par $D_q^{(n_p)}$ la dérivée d'ordre n_p prise par rapport à l'argument de l'un des pôles. Les quantités q_p sont réelles, bornons-nous d'abord au cas où les $A_s^{(p)}$ sont réels et appelons $h(x)$ la partie réelle de $H(e^{-ix})$. On aura alors:

$$U_f = \int_0^{2\pi} f(x)h(x)\,dx + \sum_{p=1}^{p=m} \{ A_0^{(p)} f(q_p) + \cdots + A_{n_p}^{(p)} f^{(n_p)} q_p \},$$

et U_f sera ainsi une opération linéaire bien définie dans le champ C'_m. Mais la formule (19) n'aura plus de sens si on l'applique à une fonction quelconque du champ C'. Prenons par exemple le cas particulier où:

$$\kappa(z) = \frac{Aize^{iq}}{2(1 - ze^{iq})^2},$$

A et q étant deux constantes réelles et:

$$f(x) = \sin x + \cdots + \frac{\sin nx}{n^2} + \cdots.$$

La formule (19) donnerait:

$$U_f = \lim_{r=1} L\sqrt{1 - 2r\cos q + r^2}.$$

Si donc q est quelconque, on aura en général:

$$U_f = L\sqrt{2(1 - \cos q)};$$

mais si l'on a pris par exemple $q = 0$, on a:

$$U_f = \lim_{r=1} L(1 - r),$$

ce qui ne donne aucune valeur finie de U_f.

3°. On pourrait croire que puisque l'existence d'un pôle d'ordre m de $K(z)$ sur S restreint l'application de U_f aux fonctions du champ C'_m, l'existence d'un point singulier essentiel doit en restreindre encore l'application aux fonctions du champ C'_ω. Il n'en est pas ainsi comme le prouve l'exemple très général suivant.

Prenons:

$$\kappa(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{2} \frac{1 + ze^{iq_n}}{1 - ze^{iq_n}},$$

où les A_n, q_n sont des nombres reéls quelconques, mais la série $\sum A_n$ étant absolument convergente. Si l'on prend $q_n = 1/n$ par exemple, on a bien une fonction holomorphe dans S et qui a sur S un point singulier $z = 1$. Or quels que soient les q_n, on a en appliquant la formule (19):

$$U_f = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n f(q_n),$$

et l'opération est définie pour toute fonction du champ C'. On voit donc qu'à ce point de vue, dans l'exemple $q_n = 1/n$, la singularité essentielle $z = 1$, n'est pour ainsi dire qu'une singularité artificielle. Elle ne présente aucune particularité propre en dehors de celles qu'elle possède comme limite de pôles simples. C'est là un point qui peut avoir son intérêt dans la théorie des fonctions analytiques.

BESANÇON, *Février*, 1907.