SUR L'INTÉGRALE DE LEBESGUE*

PAR

C. DE LA VALLÉE POUSSIN

TABLE DES MATIÈRES

Le présent Mémoire reproduit une partie des leçons que j'ai eu l'honneur de faire à l'Université Harvard pendant le second semestre de l'année 1914–1915. C'en est la partie originale. J'y traite d'une manière nouvelle quelques questions anciennes, mais j'y aborde surtout des problèmes nouveaux. Beaucoup des résultats obtenus ne sont pas imprimés ici pour la première fois. Ils l'étaient déjà au mois d'Août 1914 et devaient paraître à la fin de cette même année dans la 3[e] édition du tome II de mon *Cours d'analyse.* Tout cela a été brûlé à Louvain avec beaucoup d'autres choses plus précieuses. Dans les circonstances tragiques que traverse la Belgique, l'invitation de la grande Université Américaine a été, pour l'Université de Louvain et pour moi, une marque de bienveillance et une faveur dont je ne saurais trop dire le prix. Qu'il me soit permis de dédier à l'Université Harvard ce travail, qui n'aurait pas vu le jour sans elle, comme un faible témoignage de ma profonde gratitude.

1. Opérations sur les ensembles; ensembles mesurables

1. Opérations sur les ensembles de points. Nous considérons ici des ensembles de valeurs de x dans un intervalle (a, b), ou de points sur une droite.

* Presented to the Society, August 3, 1915.

Étant donnés des ensembles E_1, E_2, $\cdots$, on peut effectuer sur eux les opérations suivantes:

L'addition, qui consiste à former l'ensemble des points appartenant à l'un au moins des ensembles E_1, E_2, $\cdots$, ou à former la somme de ces ensembles: $E_1 + E_2 + \cdots$.

La soustraction, qui consiste à retrancher de l'ensemble E les points qui appartiennent à E_2, ou à former la différence, $E_1 - E_2$, de ces deux ensembles.

La multiplication, qui consiste à former l'ensemble des points communs à E_1, E_2, $\cdots$, ou à former le produit $E_1 E_2 \cdots$ de ces ensembles.

L'addition et la multiplication peuvent être des opérations infinies, c'est-à-dire que l'on peut additionner entre eux ou multiplier entre eux une infinité dénombrable d'ensembles. La somme se forme en réunissant les points de tous les ensembles, le produit en prenant les points communs à tous les ensembles.

Étant donnée une suite d'ensembles E_1, E_2, $\cdots$ E_n, $\cdots$, nous appellerons, avec M. Borel, *ensemble limite complet,* E, l'ensemble des points qui appartiennent à une infinité d'ensembles de la suite. Nous appellerons *ensemble limite restreint,* R, celui des points qui appartiennent à tous les ensembles de la suite à partir d'un certain rang (dépendant généralement du point considéré). Ces ensembles se forment au moyen des opérations précédentes; on a, en effet,

$$E = (E_1 + E_2 + E_3 + \cdots)(E_2 + E_3 + \cdots)(E_3 + \cdots)\cdots,$$

$$R = E_1 E_2 E_3 \cdots + E_2 E_3 \cdots + E_3 \cdots + \cdots.$$

La formation de E et de R est analogue à celle des plus grande et plus petite limites d'une suite de quantités. Si les ensembles limites complet et restreint sont identiques, nous dirons que la suite E_1, E_2, $\cdots$ a une *limite unique* ou, tout simplement, une *limite* E. Nous écrirons, dans ce cas,

$$E = \lim E_n.$$

Cette dénomination se justifie par l'extension aux ensembles des principes de la théorie des limites de quantités. On a, en effet, le théorème suivant: *Si des ensembles, en nombre limité,* E_n, E'_n, $\cdots$ *ont respectivement pour limites* E, E', $\cdots$, *les sommes* $E_n + E'_n + \cdots$ *et les produits* $E_n E'_n \cdots$ *ont respectivement pour limites* $E + E' + \cdots$ *et* $EE' \cdots$.

Tout cela s'étend de soi-même aux ensembles à plusieurs dimensions.

2. **Mesure des ensembles linéaires.** M. Lebesgue définit de la manière suivante la mesure des ensembles linéaires, c'est-à-dire des ensembles de points sur une droite.

Soit E un ensemble compris dans un intervalle (a, b). Enfermons E dans un système A formé d'une infinité dénombrable d'intervalles α non empiétants. La mesure de A, désignée par mA, est la somme des amplitudes des α. La borne inférieure de mA, pour tous les systèmes A d'intervalles contenant E, est la *mesure extérieure* de E, $m_e E$. Soit CE le complémentaire de E, formé des points de l'intervalle (a, b) exclus de E; la *mesure intérieure* de E, $m_i E$, est la différence $(b - a) - m_e CE$. Si les mesures extérieure et intérieure sont égales, E est *mesurable* et la valeur commune des deux mesures précédentes est la *mesure de* E, mE. C'est le seul cas que nous aurons à considérer dans la suite.

Voici la propriété fondamentale des ensembles mesurables:

Les sommes, différences, produits et limites d'ensembles mesurables sont mesurables.

Il faut encore remarquer les théorèmes suivants:

La somme $E = E_1 + E_2 + \cdots$ *d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles sans point commun contenus dans* (a, b), *a pour mesure la somme des mesures* $mE_1 + mE_2 + \cdots$.

Si la suite des ensembles mesurables $E_1, E_2, \cdots E_n, \cdots$ *a une limite unique* E, *la mesure de* E *est la limite de* mE_n.

Nous n'avons à nous occuper ici que de ce dernier théorème. Il est classique dans deux cas particuliers: Si chaque ensemble E_n contient le suivant, ou si chaque ensemble E_n contient le précédent. Dans le cas général, E peut être considéré comme ensemble limite, soit complet, soit restreint. Dans la première hypothèse, on a

$$E = (E_1 + E_2 + \cdots)(E_2 + E_3 + \cdots) \cdots (E_n + \cdots) \cdots .$$

Nous rentrons dans le premier cas particulier signalé en regardant E comme limite des ensembles formés avec un nombre limité de ces facteurs. Nous avons ainsi

$$mE = \lim m(E_n + E_{n+1} + \cdots) \geqq \lim mE_n .$$

Par contre, en considérant E comme ensemble limite restreint,

$$E = E_1 E_2 \cdots + E_2 E_3 \cdots + \cdots + E_n E_{n+1} \cdots + \cdots ,$$

nous rentrons dans le second cas particulier signalé. Nous avons alors

$$mE = \lim mE_n E_{n+1} \cdots \leqq \lim mE_n .$$

Donc, en comparant, $mE = \lim mE_n$.

2. Les ensembles linéaires mesurables (B). Leur classification

3. Les ensembles mesurables (B), les seuls qui aient été considérés au début par M. Borel, sont ceux qui s'obtiennent, à partir des points et des intervalles, par l'emploi des opérations indiquées dans le paragraphe précédent.

Un point peut être considéré comme la partie commune à deux intervalles; les ensembles mesurables (B) peuvent donc se constituer à partir des intervalles. Les complémentaires des intervalles *fermés* (frontières inclues) sont des intervalles *ouverts* (frontières exclues). Afin de placer les complémentaires sur le même rang, nous prendrons comme point de départ, pour construire les ensembles mesurables (B), les intervalles ouverts ou fermés à volonté.

Les opérations sur les ensembles se ramènent à deux seulement au moyen des complémentaires, *l'addition* et la *multiplication*, car la soustraction se ramène à la multiplication par la formula $E - E' = E \cdot CE'$.

Nous nous proposons ici de faire la classification des ensembles mesurables (B) d'après le nombre d'additions et de multiplications infinies *superposées* que nécessite leur définition. Ce nombre d'opérations infinies pourra d'ailleurs être fini ou transfini comme nous allons l'indiquer.

Nous rangeons dans la *première classe* les ensembles formés d'un numbre fini d'intervalles ou de points et leurs complémentaires, qui sont formés de la même façon.

Passons à la *seconde classe*. Nous rangeons d'abord dans celle-ci les sommes et produits infinis d'ensembles de la première classe, qui, bien entendu, ne rentrent plus dans cette classe. Ces ensembles sont les *ensembles fondamentaux* de la deuxième classe. Les autres ensembles de cette classe sont ceux qui se construisent au moyen de ceux-là sans nouvelle opération infinie, donc par un nombre limité d'additions et de multiplications. On peut aussi introduire dans cette composition des ensembles de classe *un*.

Convenons de représenter en général une somme fondamentale par S et un produit fondamental par P. Un ensemble de la deuxième classe s'exprimera par un polynome relativement aux lettres S et P. Mais l'expression de ce polynome se simplifie, parce que l'addition et la multiplication des ensembles sont des opérations *commutatives, associatives et distributives*; d'où il suit que:

1°. La somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de sommes S est une somme S;

2°. Le produit d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de produits P est un produit P;

3°. Le produit d'un nombre *fini* de sommes S est une somme S;

4°. La somme d'un nombre *fini* de produits P est un produit P.

La dernière propriété seule n'est pas immédiate, mais elle se ramène à la précédente par la considération des complémentaires. En effet, le complémentaire d'un produit est une somme, $C(E_1 E_2 \cdots) = CE_1 + CE_2 + \cdots$. Si donc $E = P_1 + P_2 + \cdots$, on a $CE = (CP_1)(CP_2) \cdots$, donc CE est un produit de sommes, ce qui revient à une seule somme, et alors E est un produit.

Revenons maintenant au polynome en S et P par lequel s'exprime un ensemble de la deuxième classe. On peut réduire à une seule somme S les sommes qui s'ajoutent ou se multiplient; de même, à un seul produit P les produits qui s'ajoutent ou se multiplient. Après cela, chaque terme du polynome se réduit soit à une somme S, soit à un produit P, soit à l'expression combinée SP, avec comme coefficient un ensemble de classe *un,* mais dont on se débarrasse en l'englobant dans S ou dans P. Après cela, l'ensemble E de la deuxième classe s'exprime par une formule de la forme

$$E = SP + S'P' + \cdots + P'' + S'', \tag{1}$$

ou S'' peut exceptionnellement se réduire à un ensemble de la première classe. Nous donnerons à cette formule (1) le nom de *formule de structure de E.*

Il importe, pour montrer que le procédé de formation est général, de prouver que les complémentaires ne sont pas exclus. Montrons donc que le complémentaire de E est de la même classe que E. Cela résulte de ce que l'addition et la multiplication sont des opérations conjuguées par les formules:

$$C(E_1 E_2 \cdots) = CE_1 + CE_2 + \cdots,$$
$$C(E_1 + E_2 \cdots) = (CE_1)(CE_2) \cdots.$$

Il suit de là que le calcul de CE se fait parallèlement à celui de E en remplaçant au départ les intervalles par leurs complémentaires, puis les opérations par leurs conjuguées.

Passons à la *troisième classe.* Les ensembles fondamentaux sont les sommes S ou produits P d'une infinité dénombrable d'ensembles de la 2ᵉ classe. Les autres ensembles s'expriment au moyen de ceux-là par la même formule de structure (1) que ci-dessus.

Nous formons ainsi, de proche en proche, des ensembles des classes 1, 2, 3, $\cdots n, \cdots$ en nombre infini.

Maintenant nous pouvons former des sommes et produits fondamentaux avec des ensembles d'une infinité de classes différentes. Ce sont ceux d'une première classe d'un nouveau *genre.* Nous dirons que les classes précédentes sont de genre 1 et celle-ci de genre 2. Notre nouvelle classe sera la première du genre 2 et sera dite *d'ordre transfini* par rapport à celles de genre 1. Les ensembles qui en font partie s'expriment encore au moyen des ensembles fondamentaux par la même formule de structure (1) que précédemment. Il n'y a pas de classe d'ordre immédiatement antérieur a la première classe de genre 2.

Nous passons ensuite aux classes d'ordre 2, 3, $\cdots$ de genre 2, puis au genre 3, et ainsi de suite indéfiniment sans jamais etre arrêtés. La formule de structure (1) est générale; elle exprime les ensembles d'une classe quelconque au moyen de sommes ou produits infinis d'ensembles de classe moindre.

4. **Théorème.** *Tout ensemble mesurable* (B) *de classe supérieure à la première peut être défini comme limite unique* ($N°$ 1) *d'une suite d'ensembles de classe moins élevée.*

Un ensemble quelconque étant formé par addition ou multiplication d'un nombre fini d'ensembles fondamentaux, il suffit de prouver la proposition pour un ensemble fondamental (N° 1). Or, dans ce cas, elle est immédiate: un ensemble S est la limite de l'ensemble S_n de classe moindre obtenu en limitant la somme à ses n premiers termes; et, de même, l'ensemble P est la limite du produit P_n limité à n facteurs.

5. La classification précédente des ensembles mesurables (B) est dans une relation étroite avec la classification des fonctions que M. Baire a indiquée dans sa thèse (Annali di matematica, 1900) et que voici:

Une fonction limite de fonctions continues est de la première classe; une fonction limite de fonctions de la première classe est de la seconde classe, et ainsi de suite.

La question de l'existence des classes d'ensembles se ramène à celle des classes de fonctions et réciproquement.* C'est ce qui résultera des théorèmes que nous établirons ici et plus loin (N° 8). Commençons par montrer la dépendance des deux classifications.

Soit E un ensemble mesurable (B). Définissons une fonction $\phi(x)$ égale a 1 dans E et à 0 dans CE. Nous l'appellerons la *fonction caractéristique de* E.

Observons, en passant, les propriétés suivantes des fonctions caractéristiques d'ensembles:

1°. Si $\phi_1, \phi_2, \cdots$ sont les fonctions caractéristiques de $E_1, E_2, \cdots$, celle ϕ du produit $E_1 E_2 \cdots$ est

$$\phi = \phi_1 \phi_2 \cdots .$$

2°. Si $E_1, E_2, \cdots$ sont sans point commun deux à deux, la fonction caractéristique, ϕ, de la somme $E_1 + E_2 + \cdots$ est

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots .$$

3°. Si la suite $E_1, E_2, \cdots$ a une limite unique E, la fonction caractéristique, ϕ, de E est

$$\phi = \lim \phi_n .$$

Revenons maintenant à la classification de Baire. Nous avons le théorème suivant:

Si un ensemble E est d'une classe d'ordre α, sa fonction caractéristique est, au plus, d'ordre α dans la classification de Baire.

Si E est de la première classe, sa fonction caractéristique prend alternative-

* Cette question a été résolue par M. Lebesgue. Journal de mathématiques pures et appliquées (6) (1905), p. 212–214.

ment les valeurs 0 et 1 dans des intervalles. Elle est évidemment limite de fonctions continues, donc de la première classe de Baire.

Dans le cas général, la fonction caractéristique d'un ensemble de classe α est la limite de fonctions caractéristiques d'ensembles de classe moindre, en vertu du théorème du n° 4 et de la propriété 3° que nous venons d'énoncer. Donc, de proche en proche, cette classe est au plus d'ordre α.

Ce théorème admet une sorte de réciproque: *S'il existe des fonctions de classe α dans la classification de Baire, il existe aussi des classes d'ensembles de tous les ordres* $< \alpha$. C'est ce qui sera etabli plus loin au N° 8.

La classification des ensembles exposée dans ce paragraphe n'est pas la seule possible. On pourrait aussi les classer d'après le nombre de passages à la limite (au sens expliqué N° 1) que nécessite leur définition, ou d'après la classe de leur fonction caractéristique (au sens de Baire). Nous avons préféré nous placer strictement au point de vue des définitions de M. Borel.

3. Fonctions mesurables et fonctions mesurables (B)

6. **Définition.** Soit $f(x)$ une fonction univoque de x dans un intervalle (a, b). On ne la suppose pas finie, c'est-à-dire que sa valeur peut être infinie (de signe déterminé) en certains points. Convenons de désigner respectivement par

$$E(f > A), \qquad E(f \geqq A), \qquad E(A < f \leqq B), \qquad \text{etc.},$$

l'ensemble des points de l'intervalle (a, b) où la condition entre parenthèses est vérifiée. Nous dirons, avec M. Lebesgue, que $f(x)$ est *mesurable* dans (a, b) si l'un ou l'autre (ce qui revient au même) des deux ensembles complémentaires:

$$E(f \geqq A), \qquad E(f < A),$$

est mesurable quel que soit le nombre donné A. Si, de plus, cet ensemble est mesurable (B), $f(x)$ est *mesurable* (B).

On pourrait aussi bien prendre comme condition de mesurabilité que les ensembles complémentaires: $E(f > A)$, $E(f \leqq A)$ soient mesurables, car ces conditions, aussi bien que les précédentes, entraînent la mesurabilité de l'ensemble $E(f = A)$.

Il peut arriver que l'on ait seulement à considérer la fonction $f(x)$ dans un ensemble E. On dira alors qu'elle est mesurable sur E, si elle est mesurable quand on l'annule hors de E.

Nous ne reviendrons pas ici sur les démonstrations des propriétés classiques des fonctions mesurables. Rappelons seulement que les somme, différence, produit, quotient de fonctions mesurables sont mesurables (On suppose que le diviseur ne s'annule pas). On peut aussi remplacer dans cet énoncé le mot *mesurable* par *mesurable* (B).

7. **Limites de fonctions mesurables.**—I. *Les bornes supérieure et inférieure d'une infinité dénombrable de fonctions mesurables de x sont mesurables.*

En effet, soit $\phi(x)$ la borne supérieure, $\psi(x)$ la borne inférieure d'un ensemble dénombrable de fonctions $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ (peu importe l'ordre). On a

$$E(\phi > A) = \Sigma E(f_n > A), \qquad E(\psi < A) = \Sigma E(f_n < A).$$

Donc, en particulier, *la limite d'une suite monotone de fonctions mesurables est mesurable.*

II. *Les plus grande et plus petite limites d'une suite de fonctions mesurables* $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ *sont mesurables.*

Soit $\phi_n(x)$ la borne supérieure (pour chaque x) de l'ensemble des fonctions $f_n, f_{n+1}, \cdots$. Cette borne est mesurable par le théorème précédent. Ensuite la plus grande limite de $f_1, f_2, \cdots$ est la limite de la suite monotone ϕ_1, $\phi_2, \cdots$ donc elle est mesurable. Raisonnement analogue pour la plus petite limite.

En particulier, *toute limite (supposée existante) de fonctions mesurables est mesurable.* En effet, toute limite peut être considérée, si elle existe, comme limite d'une suite $f_1, f_2, \cdots$, ce qui ramène au théorème précédent.

III. *Soit y une variable qui tend vers a en passant par toutes les valeurs intermédiaires (a exclu). Soit alors $f(x, y)$ une fonction mesurable de x pour chaque y et continue de y pour chaque x. Les deux fonctions de x (plus grande et plus petite limites)*

$$\overline{\lim_{y=a}} f(x, y), \qquad \underline{\lim_{y=a}} f(x, y),$$

sont mesurables.

Supposons que y tende vers a en croissant. La borne supérieure (pour x donné) de la fonction $f(x, y)$ de y dans l'intervalle $(a - \epsilon, a)$ est une fonction $\psi_\epsilon(x)$ qui est mesurable. En effet, à cause de la continuité en y, cette borne est la même que si y parcourait seulement l'infinité dénombrable des valeurs rationnelles entre $a - \epsilon$ et a, ce qui ramène au théorème I. Ensuite la plus grande limite de $f(x, y)$ est la limite de $\psi_\epsilon(x)$ quand ϵ tend vers 0. Le raisonnement est analogue pour la plus petite limite.

Dans tous ces énoncés, on peut remplacer le mot *mesurable* par *mesurable* (B). Par exemple *les nombres dérivés d'une fonction continue $f(x)$ sont des fonctions mesurables* (B), en vertu de la dernière règle.

8. **Théorème.** *L'ensemble des fonctions mesurables (B) est le même que celui des fonctions entrant dans la classification de Baire* (Lebesgue).*

D'abord toute fonction de Baire est mesurable (B). En effet, une fonction continue est mesurable (B), car les ensembles $E(f \geqq A)$, étant alors fermés,

*Journal de mathématiques pures et appliquées, 1905, p. 168–179.

sont mesurables (B). Comme les autres fonctions de Baire se déduisent des fonctions continues par des passages à la limite successifs, elles sont aussi, de proche en proche, mesurables (B).

Réciproquement, toute fonction mesurable (B) rentre dans la classification de Baire. Il suffit évidemment de prouver le théorème pour une fonction f positive, et même, pour une fonction comprise entre 0 et 1, car f est une fonction de Baire si $1 : (1 + f)$ en est une, et celle-ci est comprise entre 0 et 1.

Soit donc f une fonction mesurable (B) comprise entre 0 et 1. Soit $\phi_k(x)$ la fonction caractéristique (N° 5) de l'ensemble

$$E\left(\frac{k-1}{n} \leqq f < \frac{k}{n}\right),$$

où n et k sont entiers et $k \leqq n$. La fonction ϕ_k est, comme on le sait (N° 5), une fonction de Baire. Il en est de même pour la fonction somme

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \phi_k(x).$$

Mais f et ψ_n diffèrent au plus de $1/n$. Donc f est la limite de ψ_n quand n tend vers l'infini et est, par conséquent, une fonction de Baire.

Remarque. – La fonction f s'obtient par un seul passage à la limite sur les fonctions caractéristiques ϕ_k, ce qui élève l'ordre de la classe d'une unité au plus. Donc, s'il existe effectivement une fonction de classe α dans la classification de Baire, il existe des classes d'ensembles de tous les ordres $< \alpha$ dans notre classification des ensembles mesurables (B). C'est le résultat que nous avons déjà signalé plus haut (N° 5).

4. Intégrale de Lebesgue. Passage à la limite sous le signe d'intégration

9. Intégrale d'une fonction bornée. Rappelons seulement ici comment se définit l'intégrale de Lebesgue sur un ensemble E. Soit $f(x)$ une fonction mesurable et bornée par les deux nombres A et B (supposés non accessibles) quand x varie sur l'ensemble E. On partage l'intervalle (A, B) par une échelle de nombres,

$$A = l_0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_n = B,$$

dont les degrés $l_i - l_{i-1}$ peuvent être supposés aussi petits qu'on veut. On désigne par e_i la mesure de l'ensemble des points de E où f est $\geqq l_{i-1}$ et $< l_i$. On forme alors les deux sommes:

$$s = \sum_1^n e_i\, l_{i-1}, \qquad S = \sum_1^n e_i\, l_i.$$

Ces deux sommes tendent vers une limite commune quand tous les degrés de l'échelle tendent vers 0. C'est l'intégrale de Lebesgue sur E. Cette intégrale se représente par

$$\int_E f(x)\,dx, \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

quand E s'étend à tout l'intervalle (a, b).

10. **Intégrales de fonctions non bornées. Fonctions sommables.** Nos définitions ne sont plus ici entièrement équivalentes à celles de Lebesgue. Soit $f(x)$ une fonction non bornée, finie ou non. Supposons-la d'abord non négative sur l'ensemble borné E. Définissons alors une fonction auxiliaire $f_n(x)$ égale à $f(x)$ ou à n selon que $f(x)$ est $\leqq$ ou $\geqq$ qu'un nombre positif donné n (entier ou non). On pose, par définition,

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n=} \int_E f_n(x)\,dx.$$

Cette limite est finie ou infinie. Si elle est finie, la fonction $f(x)$ est *sommable* sur E. Dans ce cas, il est clair que la fonction $f(x)$ ne peut être infinie que sur un ensemble de mesure nulle.

Le cas où f est non positif se ramène au précédent par un simple changement de signe. Dans le cas général, on peut considérer f comme la différence, $f_1 - f_2$, de deux fonctions non négatives (On fait f_1 égal à f ou à 0 selon que f est positif ou non). Dans ce cas, on dit que f est sommable si f_1 et f_2 sont sommables, et l'intégrale de f est la différence de celles de f_1 et de f_2. Si f_1 et f_2 ne sont pas sommables, f n'a pas d'intégrale.

11. Nous supposerons connues les propriétés fondamentales des intégrales de fonctions sommables. Nous en énoncerons seulement ici quelques unes pour mémoire:

1°. L'intégrale d'une somme d'un nombre limité de fonctions sommables est la somme des intégrales de chaque terme.

2°. Soit $E_1, E_2, \cdots$ un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles mesurables, contenus dans un intervalle (a, b) où f est sommable. Soit E la somme des ensembles $E_1, E_2, \cdots$ supposés sans points communs deux à deux. Alors l'intégrale de f sur E est la somme des intégrales sur $E_1, E_2, \cdots$. On exprime cette propriété en disant que l'intégrale est une *fonction additive d'intervalles.*

3°. Si f est sommable dans E et si l'on désigne par e une portion quelconque de E, l'intégrale de f dans E est infiniment petite avec la mesure de e. On exprime cette propriété en disant que l'intégrale est une *fonction absolument continue.*

4°. Si f est la limite d'une suite convergente de fonctions de x, bornées dans leur ensemble, $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$, on a

$$\int_E f dx = \lim_{n=\infty} \int_E f_n \, dx .$$

Cet important théorème est dû à M. Lebesgue. Nous nous proposons, dans le paragraphe actuel, d'étudier sous quelles conditions le passage à la limite sous le signe d'intégration peut s'étendre aux fonctions non bornées.

Les résultats fondamentaux relatifs à cette question sont dûs à M. Vitali, qui les a exposés dans un important Mémoire *Sull' integrazione per serie.** Nous allons exposer ici les résultats obtenus par M. Vitali en en modifiant toutefois un peu les énoncés et les démonstrations, et en y ajoutant de nouveaux résultats.

12. **Définition.** Soit $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ une infinité de fonctions sommables de x; considérons les diverses intégrales

$$\int f_n \, dx .$$

Nous dirons, avec M. Vitali, que *l'absolue continuité de ces intégrales est uniforme sur un ensemble E*, si à tout ϵ positif correspond un δ tel qu'on ait, quel que soit n,

$$\left| \int_e f_n \, dx \right| < \epsilon,$$

pourvu que e soit une portion de E de mesure $< \delta$.

Cette définition appelle une remarque qui sera utile. *Si les $\int f_n \, dx$ ont leur absolue continuité uniforme sur l'ensemble E supposé borné, les intégrales étendues à E sont bornées dans leur ensemble.* En effet, E se partage en un nombre limité d'ensembles de mesures $< \delta$ et l'intégrale sur E en un même nombre limité d'intégrales de module $< \epsilon$.

13. **Théorème I.** *Soit $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ une suite de fonctions de x, finies ou non, mais sommables et tendant vers une limite (finie ou non) F. Si l'absolue continuité des intégrales $\int f_n \, dx$ est uniforme sur un ensemble E, F est sommable sur E.*

Remarquons que, si la continuite absolue est uniforme pour $\int f_n \, dx$, elle l'est aussi pour $\int | f_n | \, dx$, car on peut considérer exclusivement les ensembles e sur lesquels f ne change pas de signe. D'autre part, si f_n tend vers F, $| f_n |$ tend vers $| F |$, et F est sommable en même temps que $| F |$. Il suffit donc de démontrer le théorème pour la suite des fonctions $| f_n |$. Autant supposer

*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 23, 1907, pp. 137–155.

tout de suite que les fonctions f_n et F sont non négatives. Dans cette hypothèse, définissons $(f_n)_M$ comme égal à f_n ou à M selon que f_n est $\leqq$ ou $\geqq M$. Définissons F_M d'une manière analogue. Comme $(f_n)_M$ tend vers F_M en restant borné, nous avons, sans difficulté, par le théorème de Lebesgue,

$$\int_E F_M\,dx = \lim_{n=\infty}\int_E (f_n)_M\,dx \leqq \lim_{n=\infty}\int_E f_n\,dx,$$

l'inégalité résultant de $(f_n)_M \leqq f_n$. Mais la dernière intégrale est bornée, comme conséquence de l'uniformité de l'absolue continuité, ainsi que nous l'avons fait remarquer plus haut en donnant cette définition. Donc

$$\int_E F_M\,dx$$

est bornée quel que soit M, et, par conséquent, F est sommable.

14. **Théorème II.** *Avec les hypothèses du théorème précédent, on aura, en outre,*

$$\lim_{n=\infty}\int_E f_n\,dx = \int_E F dx.$$

Puisque la fonction F est sommable, elle est finie presque partout et son intégrale est absolument continue. Nous pouvons retrancher de l'ensemble E les points où l'une des fonctions $f_1, f_2, \cdots, F$ devient infinie, car il est de mesure nulle et cela ne change la valeur d'aucune intégrale. D'autre part, la convergence absolue des intégrales des fonctions $f_n - F$ est uniforme comme pour les f_n et ces fonctions ont pour limite zéro. Nous pouvons donc admettre dans la démonstration que les fonctions f_n sont finies et ont pour limite zéro dans tout E. Il suffit alors de prouver que

$$\lim_{n=\infty}\int_E f_n\,dx = 0.$$

Soit $A_1, A_2, \cdots A_m, \cdots$ une suite de quantités positives croissantes jusqu'à l'infini. Désignons par E_m l'ensemble des points de E où l'une au moins des valeurs absolues $|f_n|$ est $> A_m$ et considérons la suite $E_1, E_2, \cdots E_m, \cdots$. Chaque ensemble contient le suivant. De plus, la mesure de E_m tend vers 0 quand m tend vers l'infini, car cette mesure est celle de l'ensemble commun aux E_m, et les E_m n'ont aucun point commun.

Considérons maintenant la décomposition:

$$\lim_{n=\infty}\int_E f_n\,dx = \lim_{n=\infty}\int_{E-E_m} f_n\,dx + \lim_{n=\infty}\int_{E_m} f_n\,dx.$$

Je dis que le second membre est nul. En effet, son premier terme est nul parce que f_n tend vers 0 dans $E - E_m$ en restant bornée; ensuite son second terme est aussi petit qu'on veut avec mE_m, puisque la continuité absolue est uniforme.

15. **Corollaire I.** *Si la suite $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ converge vers F, et si toutes les fonctions de la suite sont de module inférieur à une même fonction ϕ positive et sommable, F sera sommable et son intégrale sera la limite de celle de f_n.*

En effet, dans ce cas, la continuité absolue de $\int f_n\, dx$ est uniforme, car cette intégrale ne surpasse pas en valeur absolue celle de ϕ.

16. **Corollaire II.** *Si la suite $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ est positive et non décroissante, ces fonctions ont nécessairement pour limite une fonction F et l'on a toujours*

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n\, dx = \int_E F dx.$$

Mais si F n'est pas sommable, les deux membres sont infinis.

Si F est sommable, ce corollaire revient au précédent, car on peut faire $\phi = F$. Si F n'est pas sommable, le second membre de l'équation est infini; mais le premier l'est aussi, en vertu de l'inégalité suivante, obtenue dans la démonstration du Théorème I,

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n\, dx \geqq \int_E F_M\, dx,$$

et dans laquelle le second membre est maintenant infini avec M.

17. **Théorème III.** *Si les fonctions sommables $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$, ayant par hypothèse une limite F, sont de plus non négatives, la condition nécessaire et suffisante pour que F soit sommable et son intégrale limite de celle de f_n, est que la continuité absolue de $\int f_n\, dx$ soit uniforme dans E.*

Il suffit de prouver que la condition est nécessaire, donc que, si la continuité absolue n'est pas uniforme, ou bien F n'est pas sommable, ou bien son intégrale n'est pas la limite de celle de f_n. Si F n'est pas sommable, le théorème est démontré. Supposons donc F sommable.

Reprenons encore les notations de la démonstration du Théorème II. Soit $A_1, A_2, \cdots A_m, \cdots$ une suite de nombres positifs qui croît à l'infini et soit E_m l'ensemble des points de E où l'une au moins des fonctions f_n est $> A_m$. Nous savons que mE_m tend vers 0 quand m tend vers l'infini.

Puisque la continuité absolue n'est pas uniforme dans E, on peut assigner un nombre positif ϵ tel que la condition $\int_e f_n\, dx < \epsilon$ puisse avoir lieu sur un ensemble e compris dans E et de mesure infiniment petite. Comme cette intégrale a sa continuité absolue uniforme dans CE_m où les f_n sont bornés, cette condition doit pouvoir se réaliser dans E_m, c'est-à-dire que l'on a, quelque soit m, pour des valeurs infiniment grandes de n,

$$\int_{E_m} f_n \, dx > \epsilon .$$

On a, puisque les f_n sont bornés dans CE_m,

$$\lim \int_{CE_m} f_n \, dx = \int_{CE_m} F \, dx .$$

Par conséquent, il vient

$$\overline{\lim} \int_E f_n \, dx = \lim \int_{CE_m} + \overline{\lim} \int_{E_m} f_n \, dx > \int_{CE_m} F dx + \epsilon ;$$

et, en faisant tendre m vers l'infini,

$$\lim \int_E f_n \, dx > \int_E F dx + \epsilon .$$

18. **Corollaire.** *Si la suite $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ de signe variable tend vers F sommable, et si l'intégrale de $|F|$ est la limite de celle de $|f_n|$, l'intégrale de F sera aussi la limite de celle de f_n.*

19. **Remarque.** Le théorème III s'étend évidemment aux fonctions non positives. Il s'étend aussi aux fonctions $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ qui admettent dans leur ensemble soit une borne supérieure, soit une borne inférieure. Par exemple, si l'on a, quel que soit n, $f_n > -A$, le théorème s'applique à la suite des fonctions $(f_n + A)$ qui sont non négatives, et, par conséquent, a la suite des f_n aussi. Plus généralement encore, le théorème s'appliquera à la suite $f_1, f_2, \cdots$, si toutes ces fonctions sont inférieures à une même fonction positive sommable ϕ, car le théorème s'applique à la suite des fonctions $(\phi - f_n)$ qui sont non négatives. Même conclusion évidemment si les fonctions f_n sont toutes supérieures à une même fonction négative sommable.

Toutefois le théorème III ne s'applique pas à une suite $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ quelconque. M. Vitali a seulement démontré que l'uniformité de la continuité absolue est nécessaire pour que le passage à la limite soit permis sur toute portion de l'ensemble E. Nous allons donner de ce théorème une démonstration plus simple que celle de M. Vitali. Voici d'abord comment on peut formuler le théorème à démontrer.

20. **Théorème IV.** *Si la suite des fonctions sommables $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ converge vers F sommable dans un ensemble E, et si la continuité absolue de $\int f_n \, dx$ n'est pas uniforme dans E, on peut définir un ensemble e, intérieur à E, sur lequel cette intégrale n'a pas pour limite celle de F.*

Comme dans la démonstration du Théorème II, on peut supposer les fonctions f_n finies et convergeant vers 0 dans E. Il faut alors construire un ensemble e sur lequel $\int f_n \, dx$ ne tend pas vers 0.

Revenons encore aux notations de la démonstration du Théorème II. Soit $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ une suite positive indéfiniment croissante. Désignons par E_m l'ensemble des points de E où l'une au moins des valeurs absolues $|f_n|$ est $> A_m$. Nous avons vu que chaque E_m contient le suivant et que la mesure des E_m tend vers 0 quand m tend vers l'infini.

Notre démonstration repose sur la possibilité de choisir la suite des quantités $A_1, A_2, \cdots A_m, \cdots$ de manière que la suite des ensembles correspondants $E_1, E_2, \cdots E_m, \cdots$ satisfasse à une certaine condition que nous allons indiquer.

Si l'on désigne par ϵ la plus grande limite pour $n = \infty$ de l'intégrale $\int_E |f_n|\, dx$, limite qui ne peut etre nulle, sinon la continuité absolue de cette intégrale serait uniforme, contrairement à l'hypothèse; si l'on se donne ensuite un nombre positif ω aussi petit qu'on veut, alors il est possible de choisir les A, de manière qu'à deux ensembles consécutifs quelconques E_m et E_{m+1} corresponde toujours au moins une fonction f_n vérifiant les trois inégalités:

$$\int_{E-E_m} |f_n|\, dx < \omega, \qquad \int_{E_m} |f_n|\, dx > \epsilon - \omega, \qquad \int_{E_{m+1}} |f_n|\, dx < \omega.$$

Voici, en effet, comment, après s'être donné A_1 arbitrairement, les A suivants se déterminent de proche en proche. Supposons que $A_2, A_3, \cdots A_m$ soient déjà obtenus, donc E_m connu, et qu'il faille déterminer A_{m+1}. On commence par chercher un f_n d'indice aussi grand qu'on veut satisfaisant aux deux premières inégalités, ce qui est possible, car la première intégrale (où f_n est borné) a pour limite 0 pour n infini et, par conséquent, la plus grande limite de la seconde est $\geqq \epsilon$. Ensuite, f_n étant connu, on peut prendre le nombre A_{m+1} assez grand, c'est-à-dire l'ensemble E_{m+1} de mesure assez petite, pour satisfaire à la troisième et dernière inégalité. Nous conviendrons encore de faire croître à chaque nouvelle opération l'indice n de la fonction considérée de telle sorte que, dans les inégalités en question, n croisse à l'infini avec m.

Maintenant la démonstration du théorème est devenue facile. Nos inégalités entraînent

$$\int_{E_m - E_{m+1}} |f_n|\, dx > \epsilon - 2\omega.$$

L'ensemble $E_m - E_{m+1}$ se partage généralement en deux parties sur chacune desquelles f_n ne change pas de signe. Il y en a donc au moins une, désignons-là par e_m, sur laquelle on a

$$\left| \int_{e_m} f_n\, dx \right| > \frac{\epsilon - 2\omega}{2}.$$

Je dis que nous obtiendrons l'ensemble cherché e en posant

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots .$$

En effet, par leur construction, les ensembles $e_1, e_2, e_3, \cdots$ sont extérieurs les uns aux autres. Considérons l'indice n, aussi grand qu'on veut, de la construction précédente; nous avons

$$\left|\int_e f_n\,dx\right| \geqq \left|\int_{e_m}\right| - \sum_{i=1}^{m-1}\left|\int_{e_i}\right| - \sum_{k=m+1}^{\infty}\left|\int_{e_k} f_n\,dx\right|,$$

donc *a fortiori*, puisque les e_i sont contenus dans $E - E_m$ et les e_k dans E_{m+1},

$$\left|\int_e f_n\,dx\right| \geqq \left|\int_{e_m} f_n\,dx\right| - \int_{E-E_m} |f_n|\,dx - \int_{E_{m+1}} |f_n|\,dx .$$

Donc l'intégrale sur e ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, car on peut supposer $\omega < \epsilon/6$ et alors le second membre surpasse la quantité positive

$$\frac{\epsilon - 2\omega}{2} - \omega - \omega = \frac{\epsilon}{2} - 3\omega .$$

Nous allons revenir maintenant au cas des suites de fonctions non négatives. Nous nous proposons d'obtenir des criteriums de forme plus pratique pour le passage à la limite sous le signe $\int$ et, à cet effet, de formuler des conditions portant sur l'ensemble E lui-même et non sur une partie inconnue e de celui-ci. À cet effet, nous établirons d'abord le théorème suivant:

21. **Théorème V.** *Soit M un nombre positif donné. Appelons, en général, e_n l'ensemble $E\ (f_n > M)$. La condition nécessaire et suffisante pour que la continuité absolue de $\int f_n\,dx$ soit uniforme dans un ensemble E où les fonctions $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ sont non négatives, est que à tout ϵ positif corresponde un nombre M indépendant de n, tel qu'on ait*

$$\int_{e_n} f_n\,dx < \epsilon .$$

La condition est suffisante, car, quel que soit l'ensemble e, on a

$$\int_e f_n\,dx \leqq \int_e (f_n)_M\,dx + \int_{e_n} f_n\,dx < \int_e (f_n)_M\,dx + \epsilon;$$

et, par conséquent, l'intégrale de f_n est aussi petite qu'on veut avec me, puisque celle de la fonction bornée $(f_n)_M$ est dans ce cas.

Il reste à montrer que la condition est nécessaire. Supposons donc que la condition n'ait pas lieu, c'est-à-dire que la relation opposée,

$$\int_{e_n} f_n\,dx \geqq \epsilon ,$$

se vérifie pour des valeurs infiniment grandes de M, et montrons que la continuité absolue n'est pas uniforme. De deux choses l'une: me_n tend vers 0 ou bien sa plus grande limite est $> \omega$ quand M tend vers l'infini. Dans le premier cas, la continuité absolue n'est pas uniforme par définition; dans le second, on a, par le théorème de la moyenne,

$$\int_M f_n\, dx \geqq \int_{e_n} f_n\, dx > M\omega$$

donc, l'intégrale sur E n'étant pas bornée, sa continuité absolue n'est pas uniforme (N° 12).

22. **Théorème VI.** *Soit $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ une suite de fonctions sommables non négatives, admettant une fonction limite F. Si l'on peut définir une fonction $\phi(x)$ non décroissante et infiniment grande avec x, telle que les intégrales*

$$\int_E f_n\, \phi(f_n)\, dx$$

soient bornées dans leur ensemble, alors F est sommable et son intégrale sur E est la limite de celle de f_n.

Il suffit de prouver que la continuité absolue de $\int f_n\, dx$ est uniforme. À cet effet, nous allons appliquer le théorème précédent. Soit e_n l'ensemble $E(f_n > M)$. Il faut montrer que l'on peut prendre M assez grand pour avoir, quel que soit n,

$$\int_{e_n} f_n\, dx < \epsilon.$$

C'est ce qui résulte de l'hypothèse que les intégrales

$$\int_E f_n\, \phi(f_n)\, dx > \int_{e_n} f_n\, \phi(M)\, dx$$

admettent une borne L, car on en déduit, à la seule condition de prendre M et, avec lui, $\phi(M)$ suffisamment grands,

$$\int_{e_n} f_n\, dx < \frac{L}{\phi(M)} < \epsilon.$$

23. **Remarque.** Il est intéressant de remarquer que, tant qu'on laisse la fonction ϕ indéterminée, le théorème précédent est aussi général que le théorème III. Il est, en effet, facile de montrer que, si la continuité absolue de $\int f_n\, dx$ est uniforme sur E, il est toujours possible de déterminer une fonction ϕ telle que les intégrales

$$\int_E \phi(f_n) f_n\, dx$$

soient bornées dans leur ensemble. Voici, en effet, comment on peut toujours construire cette fonction $\phi(x)$ monotone et croissant à l'infini avec x.

Donnons-nous une série positive convergente

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_k + \cdots,$$

désignons par e_n^k l'ensemble des points de E où f_n surpasse le nombre M_k, et prenons ce nombre M_k assez grand pour que l'on ait, quel que soit n,

$$\int_{e_n^k} f_n\, dx < (\epsilon_k)^2,$$

ce qui est possible, puisque la continuité absolue est uniforme.

On peut définir la fonction $\phi(x)$ en posant:

$$\phi(x) = 1/\epsilon_k, \qquad \text{si} \qquad M_k \leqq x < M_{k+1}.$$

Il vient, en effet, dans cette hypothèse,

$$\int_E \phi(f_n)\, f_n\, dx = \int_{E-e_n^1} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{e_n^k - e_n^{k+1}} \phi(f_n) f_n\, dx \leqq \frac{1}{\epsilon_1} \int_{E-e_n^1} f_n\, dx$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon_k} \int_{e_n^k} f_n\, dx < \frac{1}{\epsilon_1} M_1 (mE) + \sum_1^{\infty} \epsilon_k,$$

ce qui constitue une borne finie et indépendante de n.

Ainsi, tant qu'on laisse la fonction ϕ indéterminée, la condition du théorème VI revient à celle d'uniformité de la continuité absolue. En spécifiant la fonction ϕ, on obtient des criteriums particuliers qui peuvent être plus utiles en pratique. En prenant pour ϕ des fonctions de moins en moins rapidement croissantes, telles que f^ϵ, Log f, Log Log f, etc. on peut former une échelle de criteriums de plus en plus précis analogue à l'échelle des criteriums de convergence de Cauchy dans la théorie des séries. Considérons seulement le premier d'entre eux. Il donne le théorème suivant:

24. **Théorème VII.** *Soit $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ une suite de fonctions positives sommables, convergeant vers une fonction limite F dans un ensemble E, et soit ϵ une constante positive aussi petite qu'on veut mais indépendante de n; si les intégrales*

$$\int_E f_n^{1+\epsilon}\, dx$$

sont bornées dans leur ensemble, alors F est sommable sur E et l'on a

$$\lim \int_E f_n\, dx = \int_E F dx.$$

Le théorème précédent ne postule pas *a priori* la sommabilité de F. Si l'on suppose cette sommabilité, on peut appliquer le théorème précédent à la suite:

$$|f_1 - F|, \quad |f_2 - F|, \quad \cdots, \quad |f_n - F|, \quad \cdots$$

qui est sommable et converge vers zéro presque partout. On obtient l'énoncé suivant:

25. **Théorème VIII.** *Si la suite de fonctions sommables de signes quelconques* $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ *converge vers* F *sommable, et si les intégrales*

$$\int_E |f_n - F|^{1+\epsilon} dx \quad (\epsilon > 0)$$

sont bornées dans leur ensemble, alors on a

$$\lim \int_E f_n \, dx = \int_E F \, dx.$$

En effet, les intégrales sur E de $|f_n - F|$, et *a fortiori* celles de $(f_n - F)$, convergent alors vers 0, en vertu du théorème précédent.

Ce théorème a déjà été signalé par M. Riesz pour le cas où $\epsilon = 1$.*

5. Fonctions d'ensembles additives et absolument continues

26. **Fonctions d'ensemble mesurable. Intégrale indéfinie.** Soit $f(x)$ une fonction sommable dans un intervalle (a, b); soit e un ensemble mesurable variable, toujours compris dans (a, b). Nous pouvons poser

$$F(e) = \int_e f(x) \, dx,$$

car la considération de cette intégrale attache un nombre $F(e)$ à l'ensemble e. Cette correspondance définit ce que M. Lebesgue appelle une *fonction d'ensemble mesurable.*

La fonction d'ensemble, $F(e)$, que l'intégration permet d'attacher ainsi à une fonction $f(x)$ est *l'intégrale indéfinie de* f.

Cette fonction d'ensemble jouit de deux propriétés essentielles qu'on lui a reconnues précédemment:

1°. Elle est *absolument continue,* c'est-à-dire que $F(e)$ est infiniment petit avec la mesure de e.

2°. Elle est *additive,* c'est-à-dire qu'étant donnée une suite limitée ou illimitée d'ensembles $e_1, e_2, \cdots$ sans points communs, on a

$$F(e_1) + F(e_2) + \cdots = F(e_1 + e_2 + \cdots).$$

Nous nous proposons, dans le paragraphe actuel, d'étudier les fonctions qui

*Comptes Rendus, t. 144 (1907), pp. 615–9.

jouissent de ces deux propriétés et de prouver que ces propriétés des intégrales indéfinies les caractérisent.

La question a été traitée par M. Lebesgue, pour les ensembles à un nombre quelconque de dimensions, dans son Mémoire *Sur l'intégration des fonctions discontinues*.* Nous avons apporté quelques simplifications à l'exposé de M. Lebesgue dans la 2ᵉ édition du t. II de notre *Cours d'Analyse,* 1911. C'est la même marche que nous suivrons ici, mais en l'adaptant au cas d'une seule dimension, ce qui impose quelques variantes et permet de notables simplifications.

27. **Nombres dérivés d'une fonction d'ensemble.** Soit $F(e)$ une fonction d'ensemble mesurable dans un intervalle (a, b). Designons par Ω l'intervalle variable (a, x). La fonction de la variable x,

$$F_1(x) = F(\Omega),$$

est continue dans (a, b). Ses quatre nombres dérivés (supérieurs et inférieurs, à droite et à gauche) au point x sont aussi, par définition, ceux de la fonction d'ensemble $F(e)$ au même point. Les nombres dérivés d'une fonction d'ensemble sont donc des fonctions de point. Nous supposons connue la définition des nombres dérivés d'une fonction de point.

En particulier, h étant positif, si l'on désigne l'intervalle $(x, x + h)$ et aussi son amplitude par ω, les nombres dérivés à droite de $F(e)$ sont les plus grande et plus petite limites du quotient

$$\frac{F(\omega)}{\omega}$$

quand h, et par suite ω, tendent vers 0.

Par exemple, la mesure de e, me, est la plus simple des fonctions d'ensembles jouissant des propriétés considérées. C'est $\int dx$ dans e et ses quatre nombres dérivés sont égaux à l'unité partout.

28. **Lemme géométrique.** Toute la théorie des fonctions d'ensemble additives et absolument continues se déduit immédiatement du principe qu'une telle fonction ne peut être négative dans un ensemble où l'un de ses nombres dérivés ne l'est pas. Mais la démonstration de ce principe fondamental ne va pas sans certaines difficultés. On peut tirer cette démonstration d'un lemme géometrique dû à M. Vitali et qui s'applique au cas des ensembles de toutes dimensions. Mais, pour les ensembles linéaires, on peut se tirer d'affaire avec des considérations d'un ordre beaucoup plus simple. A cet effet, nous allons remplacer le lemme de Vitali par le suivant, qui est tout à fait élémentaire:

Si tous les points d'un ensemble fermé E sont respectivement l'origine gauche (droite) d'un intervalle correspondant ω de longueur supérieure à un nombre

* Annales de l'École Normale Supérieure, t. 27 (1910), pp. 361–450.

positif fixe ϵ, *on peut recouvrir tout* E *avec un nombre limité de ces intervalles* ω *non empiétants, mais pouvant avoir une extrémité commune.*

Pour effectuer cette opération, on mène d'abord l'intervalle ω partant du point extrême de E vers la gauche (lequel existe, E étant fermé). On mène ensuite l'intervalle qui part du point ainsi atteint si c'est un point de E, ou bien du premier point de E qui suit si l'on est tombé dans un intervalle contigu à E. On continue ainsi de suite jusqu'à ce que E soit traversé, ce qui arrive après un nombre limité d'opérations, puisque l'on avance de ϵ au moins à chacune d'elles.

Ce lemme permet de démontrer le principe suivant:

29. **Lemme fondamental.** *Une fonction d'ensemble* $F(e)$ *qui est additive et absolument continue, ne peut être négative dans un ensemble* E *où l'un de ses nombres dérivés, par exemple le nombre dérivé supérieur à droite,* Λ, *est presque partout positif.**

Comme $F(e)$ est absolument continue, sa valeur est la même sur E que sur la portion de E oû Λ est positif. Nous pouvons donc supposer dans la démonstration que Λ est positif sur tout E. Enfermons E (au sens étroit) dans un ensemble d'intervalles α, que nous appellerons A. Nous pouvons supposer la différence entre mA et mE aussi petite que nous voulons.

Puisque Λ est positif dans E, chaque point de E est l'origine gauche d'une infinité d'intervalles ω, aussi petits qu'on veut, où $F(\omega)$ est positif. Convenons d'écarter tous ceux de ces intervalles qui sortiraient du domaine A. Donnons-nous une suite positive $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots \epsilon_n, \cdots$ décroissante et tendant vers 0; désignons par E_n l'ensemble des points de E qui sont l'origine d'un intervalle ω de longueur $\geqq \epsilon_n$. Cet ensemble E_n est fermé, à cause de la continuité de $F(\omega)$; il est donc aussi mesurable. Comme E est la somme des E_n, chacun contenu dans le suivant, mE_n tend vers mE. Ainsi l'on peut prendre n assez grand pour que la différence entre mE_n et mE soit aussi petite que l'on veut.

Appliquons à E_n le lemme précédent. Nous recouvrons tout E_n avec un nombre limité d'intervalles ω. Ces intervalles constituent ainsi un domaine $\mathcal{E}$ intermédiaire entre E_n et A; et l'on a, puisque tous les $F(\omega)$ sont positifs,

$$F(\mathcal{E}) = \sum F(\omega) > 0.$$

Mais, dans ce raisonnement, on peut faire tendre simultanément mA et mE_n vers mE, auquel cas la mesure, $m\mathcal{E}$, du domaine intermédiaire tend aussi vers mE. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{E}$ ne diffère de E que par des ensembles de mesure infiniment petite, sur lesquels F (qui est absolument continue) tend

* Nous employons l'expression *presque partout* dans le sens de M. Lebesgue: elle signifie *sauf dans un ensemble de mesure nulle.*

vers 0, et nous avons, puisque F est aussi additive,

$$F(E) = \lim F(\mathcal{E}) \geqq 0.$$

30. **Dépendance entre les signes des fonctions et de leurs nombres dérivés.** Soient $F(e)$ une fonction additive et absolument continue et E un ensemble de mesure non nulle: 1°. *Si un nombre dérivé de F est presque partout de même signe et non nul dans E, F (E) a le même signe que ce nombre dérivé*; 2°. *Si, au contraire, un nombre dérivé est nul presque partout dans E, F (E) est nul.*

Si un nombre dérivé, Λ, est positif dans presque tout E, on peut assigner un ϵ assez petit pour que Λ soit $> \epsilon$ dans une portion E_1 de E de mesure non nulle. Dans E_1, la fonction $F(e) - \epsilon me$, ayant son nombre dérivé positif, est positive. Donc $F(E_1) > \epsilon m E_1$. D'autre part, Λ étant positif dans presque tout $E - E_1$, $F(E - E_1)$ est positif. Donc, en ajoutant, il vient

$$F(E) > \epsilon m E_1.$$

Ainsi $F(E)$ a le signe de Λ.

Si Λ est nul presque partout, $F(e) \pm \epsilon me$, ayant presque partout son Λ du signe de ϵ, a le signe de ϵ dans E quelque petit que soit ϵ. Donc $F(E) = 0$.

31. **Dépendance entre les grandeurs relatives de deux fonctions et celles des nombres dérivés.** Soient $F(e)$ et $\phi(e)$ deux fonctions additives et absolument continues, et E un ensemble borné: 1°. *Si un nombre dérivé de F n'est pas inférieur dans presque tout E au nombre dérivé de même espèce de ϕ, F (E) n'est pas inférieur à $\phi(E)$*; 2°. *Si les deux nombres dérivés sont égaux dans presque tout E, $F(E) = \phi(E)$. On suppose que les nombres dérivés considérés sont presque partout finis.*

Ces théorèmes se ramènent au principe fondamental (29) en observant que l'on a les relations suivantes entre des nombres dérivés supérieurs ($\overline{D}$) ou inférieurs ($\underline{D}$):

$$D(F - \phi) \geqq \begin{cases} \overline{D}F - \overline{D}\phi, \\ \underline{D}F - \underline{D}\phi. \end{cases}$$

32. **Théorème réciproque.** *Si une fonction d'ensemble $F(e)$, additive et absolument continue, est nulle sur toute portion d'un ensemble E, sa dérivée s'annule presque partout sur E.*

En effet, si la dérivée n'était pas nulle presque partout dans E de mesure non nulle, E contiendrait un ensemble E' de mesure non nulle, où un nombre dérivé serait partout de même signe, et $F(E')$ aurait ce même signe.

Nous utiliserons surtout ce théorème dans le cas suivant: soit E un ensemble donné, la fonction $\phi(e) = F(eE)$ est nulle dans toute partie de CE, donc *la dérivée de $F(eE)$ est nulle presque partout dans CE.*

33. **Théorème.** *Soit E_1 l'ensemble des points où un nombre dérivé*, Λ, *de* $F(e)$ *est* $\geqq 0$. *Toute fonction* $F(e)$ *additive et absolument continue, se partage dans la différence de deux fonctions de même nature non négatives, par la formule*

$$F(e) = F(eE_1) + F(eCE_1).$$

Je dis que $F(eE_1)$ est $\geqq 0$. En effet, $F(eCE_1)$ a sa dérivée nulle presque partout dans E_1. Donc le nombre dérivé de $F(eE_1)$ est presque partout le nombre dérivé positif Λ de F dans E_1 et il est presque partout nul dans CE_1: en définitive, il est presque partout nul ou positif. On montre de même que $F(eCE_1) \leqq 0$.

34. **Densité d'un ensemble.** Cette notion est due à Lebesgue qui l'a utilisée dans son Memoire cité de 1910 pour les ensembles à plusieurs dimensions. Voici comment nous définissons la densité d'un ensemble linéaire donné E. Considérons un ensemble variable e et formons la fonction d'ensemble,

$$F(e) = m(eE),$$

qui donne la mesure de eE. Les quatre nombres dérivés de cette fonction en un point x (appartenant ou non à E) sont les *densités* (*supérieures ou inférieures, à droite ou à gauche*) de l'ensemble E au point x. Si elles sont égales, la densité est déterminée au point x. Nous représenterons une densité par DE, une densité supérieure par $\overline{D}E$, une inférieure par $\underline{D}E$.

Il existe une *relation de compléments* entre les densités supérieure et inférieure (dans un même sens) de deux ensembles complémentaires E et CE. On a, en effet, quel que soit l'intervalle infiniment petit ω,

$$\frac{m(\omega E)}{m\omega} + \frac{m(\omega CE)}{m\omega} = 1.$$

Donc, si le premier terme tend vers sa plus grande limite, le second tend vers sa plus petite limite. Par suite, $\overline{D}E + \underline{D}CE = \underline{D}E + \overline{D}CE = 1$.

En particulier, *si la densité de E est déterminée, celle de CE l'est aussi et est égale à* $1 - D(CE)$.

Remarquons encore le théorème suivant, qui est dû à M. Lebesgue:

La densité d'un ensemble E est déterminée presque partout. Elle est presque partout égale à 1 *dans E et à* 0 *dans CE.*

En effet, la fonction $F(e) = m(eE)$ est nulle dans toute partie de CE, donc sa dérivée est nulle presque partout dans CE. Pour la même raison, la densité de CE est nulle presque partout dans E, donc la densité de E (qui est son complément) est égale à 1 presque partout dans E.

35. **Dérivée d'une intégrale indéfinie.** *L'intégrale indéfinie d'une fonction* $f(x)$ *a pour dérivée* $f(x)$ *presque partout.*

Soient α et β deux nombres rationnels quelconques ($\alpha < \beta$); désignons par

$E_{\alpha\beta}$ l'ensemble des points où l'on a $\alpha < f < \beta$. Je vais d'abord démontrer que les nombres dérivés de la fonction

$$F(e) = \int_e f(x)\,dx$$

sont compris entre α et β sur presque tout $E_{\alpha\beta}$. En effet, faisons la décomposition

$$F(e) = F(eE_{\alpha\beta}) + F(eCE_{\alpha\beta}).$$

La fonction $F(eCE_{\alpha\beta})$ s'annule sur toute partie de $E_{\alpha\beta}$, donc sa dérivée est nulle sur presque tout $E_{\alpha\beta}$. Ainsi, sur presque tout $E_{\alpha\beta}$, les nombres dérivés de $F(e)$ sont les mêmes que ceux de $F(eE_{\alpha\beta})$, qui est intermédiaire entre

$$\alpha m(eE_{\alpha\beta}) \qquad \text{et} \qquad \beta m(eE_{\alpha\beta}).$$

Donc ces nombres sont compris entre α et β aux points de $E_{\alpha\beta}$ où la densité est 1, c'est-à-dire presque tous. Remarquons maintenant que, si l'on considère toutes les combinaisons de deux nombres rationnels α, β, on forme seulement une infinité dénombrable d'ensembles $E_{\alpha\beta}$. Donc, abstraction faite d'un ensemble de points de mesure nulle E_1, les nombres dérivés de $F(e)$ sont compris entre α et β sur n'importe quel ensemble $E_{\alpha\beta}$. Il s'ensuit que, sauf aux points de E_1, $F(e)$ a pour dérivée $f(x)$, car x appartient à des ensembles $E_{\alpha\beta}$ où α et β sont aussi voisins qu'on veut de $f(x)$.

36. **Théorème.** *Une fonction d'ensemble additive et absolument continue a ses nombres dérivés finis presque partout et sommables, et elle est l'intégrale indéfinie de chacun d'eux.*

Il suffit de considérer une fonction $F(e)$ non négative. Soit DF l'un de ses nombres dérivés. Je dis qu'il est sommable. Pour le prouver, je pose $(DF)_n$ égal à DF ou à n, selon que DF est $\leqq n$ ou $\geqq n$, et je démontre que l'intégrale de $(DF)_n$ est bornée quel que soit n, en observant que cette intégrale ne peut surpasser F, parce qu'elle a presque partout une dérivée $(DF)_n$ non supérieure au nombre dérivé DF.

Après avoir établi que DF est sommable, je dis que l'on a

$$F = \int (DF)\,dx,$$

parce que les deux membres ont même nombre dérivé DF presque partout.

J'ai ainsi démontré l'identité des fonctions d'ensemble additives et absolument continues et des intégrales indéfinies.

6. Fonctions absolument continues d'une variable x. Fonctions d'ensemble qu'elles définissent

37. **Position de la question.** Soit $f(x)$ une fonction continue de x dans un intervalle (a, b). Cette fonction de point définit immédiatement ce que l'on

peut appeler une fonction continue et additive d'intervalle. En effet, soit ω un intervalle (α, β) contenu dans (a, b); la fonction $f(x)$ permet d'attacher un nombre à cet intervalle: on pose

$$F(\omega) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Cette fonction d'intervalle est évidemment additive pour deux et, par suite, pour un nombre fini quelconque d'intervalles. Cela veut dire que, si l'on décompose ω en intervalles consécutifs ω', ω'', $\cdots$, on a

$$F(\omega) = F(\omega') + F(\omega'') + \cdots.$$

Cette propriété permet d'étendre, sans ambiguité, la définition de la fonction d'intervalle F à tout ensemble $\mathcal{E}$ formé d'un nombre fini d'intervalles ω. On définit $F(\mathcal{E})$ comme étant la somme des valeurs $F(\omega)$ sur chacun des intervalles ω (supposés non empiétants) qui composent $\mathcal{E}$.

La fonction $F(\mathcal{E})$ est *une fonction absolument continue d'intervalle* si $F(\mathcal{E})$ tend vers 0 avec $m\mathcal{E}$, quel que soit $\mathcal{E}$ formé d'un nombre fini d'intervalles. Dans ce cas, nous disons que $f(x)$ est une *fonction absolument continue de x*. Nous sommes alors naturellement conduits à nous poser la question suivante:

Étant donnée une fonction de x absolument continue $f(x)$, ou, ce qui revient au même une fonction additive et absolument continue d'intervalle $F(\mathcal{E})$, existe-t-il une fonction d'ensemble mesurable quelconque, additive et absolument continue, et coïncidant avec $F(\mathcal{E})$ sur les intervalles?

38. La réponse est affirmative et la démonstration presque immédiate, grâce à l'absolue continuité.

Tout ensemble mesurable E peut se décomposer comme il suit:

$$E = \mathcal{E} + e_1 - e_2,$$

dans un ensemble $\mathcal{E}$ formé d'un nombre fini d'intervalles et la différence $e_1 - e_2$ de deux ensembles de mesure infiniment petite.* En effet, on peut enfermer E dans un ensemble A formé d'une infinité dénombrable d'intervalles de manière que mA soit infiniment voisin de mE. On peut alors prendre pour $\mathcal{E}$ un nombre fini d'intervalles de A, pour e_1 les intervalles restants, et l'on désigne par e_2 l'ensemble $A(CE)$.

Considérant la décomposition précédente, je dis que l'on peut poser

$$F(E) = \lim F(\mathcal{E}).$$

Pour le justifier, montrons que cette limite existe et est indépendante de la manière plus ou moins arbitraire de former l'ensemble $\mathcal{E}$. Il suffit de prouver

* Il est commode de faire reposer sur cette décomposition la démonstration des propriétés des ensembles mesurables. *V.* mon *Cours d'Analyse*, t. I, 3[e] édit.

que, si l'on considère une autre décomposition, analogue à la première,

$$E = \mathcal{E}' + e_1' - e_2',$$

la différence entre $F(\mathcal{E})$ et $F(\mathcal{E}')$ est infiniment petite. Or cela résulte des propriétés déjà connues de F. L'ensemble commun $\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}'$ s'obtient en retranchant soit de $\mathcal{E}$ soit de $\mathcal{E}'$ un nombre fini d'intervalles dont la somme est infiniment petite (puisque $m\mathcal{E}$, $m\mathcal{E}'$ et $m\mathcal{E}\mathcal{E}'$ tendent tous trois vers mE); donc $F(\mathcal{E})$ et $F(\mathcal{E}')$ sont infiniment voisins de $F(\mathcal{E}\mathcal{E}')$ et, par suite, l'un de l'autre.

1°. *La fonction $F(E)$ ainsi définie est additive pour deux (donc pour un nombre limité) d'intervalles.* En effet, si E et E' (sans points communs) sont respectivement les limites de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ formés d'un nombre fini d'intervalles, la fonction est additive pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ formés d'intervalles mais pouvant empiéter, de sorte que l'on a

$$F(\mathcal{E}) + F(\mathcal{E}') = F(\mathcal{E} + \mathcal{E}') - F(\mathcal{E}\mathcal{E}');$$

et, à la limite, il vient, en observant que $m\mathcal{E}\mathcal{E}'$ tend vers 0 (car mEE' est nul),

$$F(E) + F(E') = F(E + E').$$

2°. *La fonction $F(E)$ est encore additive pour une infinité dénombrable d'ensembles.* En effet, soit $E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n + \cdots$ une somme d'ensembles sans points communs. Posons $R_n = E_{n+1} + E_{n+2} + \cdots$; il vient

$$F(E) = F(E_1) + \cdots + F(E_n) + F(R_n).$$

Faisons tendre n vers l'infini; mR_n, et $F(R_n)$ avec lui, tendent vers 0, ce qui prouve la proposition.

3°. *La fonction $F(E)$ est absolument continue.* En effet, si mE est $< \delta$, E est la limite d'un ensemble $\mathcal{E}$ de mesure $< \delta$. Donc, si $F(\mathcal{E})$ est de module $< \epsilon$ sur $\mathcal{E}$ de mesure $< \delta$, $F(E)$ est aussi de module $< \epsilon$ si mE est $< \delta$.

39. Il suit de là que toute fonction absolument continue, $f(x)$, définit une fonction d'ensemble, $F(E)$, additive et absolument continue, dont les nombres dérivés sont, par définition, les nombres dérivés de $f(x)$. On peut appliquer à cette fonction toutes les formules du paragraphe précédent.

Si nous prenons, en particulier, comme ensemble E un intervalle (a, x), nous obtenons le théorème suivant:

Théorème. *Si $f(x)$ est une fonction absolument continue de x dans un intervalle (a, b), ses nombres dérivés sont sommables dans cet intervalle. Si l'on désigne par Λ l'un d'eux, on a*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x \Lambda dx. \tag{1}$$

De plus, $f(x)$ a une dérivée presque partout dans l'intervalle (a, b); si l'on désigne cette dérivée par $f'(x)$ et si l'on convient de la considérer aux seuls points où elle existe (*autrement dit, de la remplacer par* 0 *aux autres points*), *on peut écrire*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x)\, dx. \tag{2}$$

Enfin, étant donnée une fonction continue $f(x)$ admettant le nombre dérivé Λ, la condition nécessaire et suffisante pour que Λ soit sommable et satisfasse à la relation (1) *quel que soit x, est que $f(x)$ soit absolument continue dans l'intervalle (a, b).*

Ce théorème ne fait que résumer ceux du paragraphe précédent. La nécessité de la continuité absolu résulte de ce que le second membre de (1) est une fonction absolument continue. C'est sous cette forme que les théorèmes ont été publiés par M. Lebesgue dans ses *Leçons sur l'intégration* en 1904.

7. Fonctions majorante et minorante. Transformation des intégrales définies

40. **Propriétés des fonctions absolument continues d'une variable** x. Rappelons que la fonction $f(x)$ est absolument continue quand la fonction d'intervalle (α, β) ou ω qui s'y rattache,

$$F(\omega) = f(\beta) - f(\alpha),$$

est elle-même absolument continue.

Nous aurons à utiliser les propriétés suivantes, d'ailleurs très élémentaires, de ces fonctions:

1°. *La somme $f_1 + f_2 + \cdots$ d'un nombre limité de fonctions absolument continues de x est absolument continue.*

En effet, soient $F_1, F_2, \cdots$ les fonctions absolument continues d'intervalle définies respectivement par $f_1, f_2, \cdots$; la somme $F_1 + F_2 + \cdots$ est la fonction d'intervalle définie par $f_1 + f_2 + \cdots$ et elle est absolument continue.

2°. *Le carré d'une fonction absolument continue, $f(x)$, est absolument continue.*

En effet, f^2 définit la fonction d'intervalle:

$$\phi(\omega) = f^2(\beta) - f^2(\alpha) = [f(\beta) + f(\alpha)]\, F(\omega).$$

Soit M le maximum absolu de $f(x)$; on a

$$|\phi(\omega)| < 2M\, |F(\omega)|.$$

Donc, F étant absolument continue, ϕ l'est aussi.

3°. *Le produit $f_1 f_2$ de deux fonctions de x absolument continues est une fonction absolument continue.* Cette propriété revient aux précédentes par la relation

$$2f_1 f_2 = (f_1 + f_2)^2 - f_1^2 - f_2^2.$$

4°. *Une fonction à nombres dérivés bornés de fonction absolument continue est absolument continue.*

Il faut entendre par là que si $f(\phi)$ est fonction à nombres dérivés bornés de ϕ dans (A, B), tandis que ϕ est fonction absolument continue de x et varie dans (A, B) quand x varie dans (a, b), alors $f(\phi)$ est une fonction absolument continue de x dans (a, b).

Dans notre hypothèse, les différences correspondantes de f et de ϕ sont dans un rapport borné. Alors une somme de différences de f tend vers 0 avec une somme de différences de x et le théorème précédent se vérifie de suite comme il suit: Considérons un ensemble d'intervalles (α, β) de x tel que $\Sigma(\beta - \alpha)$ tende vers 0. Comme ϕ est absolument continue, la somme des différences $|\phi(\beta) - \phi(\alpha)|$ tend vers 0, donc aussi celle des différences correspondantes

$$|f[\phi(\beta)] - f[\phi(\alpha)]|.$$

5°. *Une fonction absolument continue de fonction absolument continue et monotone est absolument continue.*

La démonstration est analogue à la précédente. On observe seulement que les intervalles $[\phi(\alpha), \phi(\beta)]$ sont non empiétants en même temps que les (α, β). Alors la somme des différences $\phi(\beta) - \phi(\alpha)$ et celle des différences $f[\phi(\beta)] - f[\phi(\alpha)]$ tendent simultanément vers zéro avec $\Sigma(\beta - \alpha)$, en vertu de la continuité absolue.*

6°. *Une série convergente de fonctions d'ensemble positives et absolument continues dans un intervalle* (a, b), *est une fonction d'ensemble absolument continue.*

Soit e l'ensemble variable dans (a, b). La série est uniformément convergente, car tous les termes sont maximés et positifs quand e embrasse tout (a, b). Donc, tous les termes tendant vers 0 avec me, la somme de la série tend en même temps vers 0, de sorte que la continuité est absolue.

41. **Fonctions majorantes et minorantes.** J'ai introduit la considération de ces fonctions dans la deuxième édition de mon *Cours d'analyse* (1909) et j'ai basé toute la théorie sur leurs propriétés. J'ai procédé autrement ici. Je vais reprendre maintenant la définition de ces fonctions, mais en lui donnant une forme nouvelle, plus complète et plus précise, qui va se montrer avantageuse dans la question du changement de la variable d'intégration.

Soit d'abord $f(x)$ une fonction non négative, sommable dans l'intervalle (a, b), ensuite e un ensemble quelconque mesurable, contenu dans (a, b). Formons l'intégrale

$$F(e) = \int_e f(x)\,dx.$$

* Il est inexact de dire, comme je l'avais fait dans mon *Cours d'analyse*, t. I, 3[e] édit, qu'une fonction absolument continue de fonction absolument continue soit absolument continue. Cette erreur m'a été signalée par M. Dunham Jackson.

On peut définir deux fonctions d'ensemble, $\theta_1(e)$ et $\theta_2(e)$, absolument continues, non négatives, et telles que, quelque grand que soit le nombre positif n, les deux fonctions:

$$F_1(e) = F(e) + \frac{\theta_1(e)}{n}, \qquad F_2(e) = F(e) - \frac{\theta_2(e)}{n},$$

aient, la première tous ses nombres dérivés égaux ou supérieurs à $f(x)$ en chaque point où $f(x)$ a une valeur finie, la seconde tous ses nombres dérivées égaux ou inférieurs à $f(x)$ en chaque point sans exception. Ces deux fonctions $F_1(e)$ et $F_2(e)$, aussi voisines que l'on veut de $F(e)$ par excès ou par défaut respectivement, sont les *fonctions majorante et minorante relatives à* $F(e)$.

Je vais donc montrer comment on peut construire les deux fonctions θ_1 et θ_2.

La fonction $F(e)$ a presque partout $f(x)$ comme dérivée finie et unique. Soit E l'ensemble de mesure nulle des points de (a, b) où cette condition n'a pas lieu. Donnons-nous une série positive convergente $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_n + \cdots$. Nous pouvons enfermer E successivement dans des ensembles d'intervalles A_1, puis $A_2, \cdots A_n, \cdots$ de telle sorte qu'on ait, quel que soit n,

$$mA_n + F(A_n) < \epsilon_n,$$

car, E étant de mesure nulle, la mesure de A_n peut être rendue aussi petite que l'on veut, et, comme F est absolument continue, $F(A_n)$ est aussi petit qu'on veut avec mA_n.

Ayant satisfait à la condition précédente, je dis que l'on peut définir $\theta_1(e)$ et $\theta_2(e)$ par les séries convergentes de fonctions absolument continues et positives:

$$\theta_1(e) = \sum_1^\infty m(eA_n), \qquad \theta_2(e) = \sum_1^\infty F(eA_n).$$

Ces deux fonctions sont positives, elles sont inférieures à $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots$, enfin elles sont absolument continues (par le dernier théorème du N° précédent). Il est immédiatement apparent que $\theta_1(e)$ a une dérivee infinie positive en tout point de E, auquel cas la fonction

$$F_1(e) = F(e) + \frac{\theta_1(e)}{n}$$

a aussi une dérivée infinie positive, donc supérieure à $f(x)$ aux points où $f(x)$ est finie. D'autre part, aux points de CE, $F(e)$ a pour dérivée $f(x)$ et $F_1(e)$, qui est $\geqq F(e)$, a une dérivée $\geqq f(x)$. La fonction $F_1(e)$ est donc bien la majorante indiquée.

Pour montrer que $F_2(e)$ est minorante, on observe que, $A_1, A_2, \cdots A_{n-1}$ contenant tous A_n, on a

$$\theta_2(e) \geqq \sum_1^n F(eA_n) \geqq nF(eA_n);$$

et, par conséquent,

$$F_2(e) \leqq F(e) - F(eA_n) = F(eCA_n).$$

D'après cela, les nombres dérivés de $F_2(e)$ ne surpassent pas ceux de $F(e \cdot CA_n)$. Aux points de E, qui sont tous dans l'intérieur d'un intervalle de A_n où $F(e \cdot CA_n)$ s'annule et sa dérivée conséquemment aussi, les nombres dérivés de $F_2(e)$ sont $\leqq 0$, donc $\leqq f(x)$. Aux autres points, $F(e)$ a pour dérivée $f(x)$, et $F_2(e)$ a une dérivée égale ou inférieure à celle de $F(e)$, donc $\leqq f(x)$, ce qui prouve la proposition.

Les résultats précédents s'étendent immédiatement au cas où $f(x)$ et $F(e)$ sont non positifs. En effet, si l'on construit comme ci-dessus les majorante, $-F_2(e)$, et minorante, $-F_1(e)$, relatives à $-F(e)$ qui est non négatif, les majorante et minorante relatives à $F(e)$ sont évidemment $F_1(e)$ et $F_2(e)$, mais la minorante n'a ses nombres dérivés $\leqq f(x)$ qu'aux points où $f(x)$ est finie.

Passons au cas général où $f(x)$ désigne une fonction sommable de signe variable. Dans ce cas, f est la différence $f_1 - f_2$ de deux fonctions non négatives. Soit

$$F(e) = \int_e f dx = \int_e f_1\, dx - \int_e f_2\, dx.$$

La majorante relative à F est la somme des majorantes relatives aux intégrales de f_1 et $-f_2$; la minorante, la somme des minorantes relatives aux deux mêmes intégrales. De là, le théorème suivant:

Soit $f(x)$ une fonction sommable et soit

$$F(e) = \int_e f(x)\, dx$$

son intégrale indéfinie. On peut définir deux fonctions positives et absolument continues, $\theta_1(e)$ et $\theta_2(e)$, jouissant des propriétés suivantes: si l'on forme les deux fonctions:

$$F_1(e) = F(e) + \frac{\theta_1(e)}{n}, \qquad F_2(e) = F(e) - \frac{\theta_2(e)}{n}$$

où n désigne un nombre positif aussi grand qu'on voudra, la fonction $F_1(e)$ a tous ses nombres dérivés $\geqq f(x)$ en chaque point où $f(x)$ n'est pas infinie positive, la fonction $F_2(e)$ a les siens $\leqq f(x)$ en chaque point où $f(x)$ n'est pas infinie négative. Ces deux fonctions sont les majorante et minorante relatives à $F(e)$. Elles sont aussi voisines que l'on veut de $F(e)$, par excès ou par défaut respectivement, à condition d'attribuer une valeur suffisamment grande à n.

Nous ferons encore observer que, dans la définition des fonctions majorante et minorante, on peut remplacer θ_1 et θ_2 par une seule et même fonction θ, prise égale à $\theta_1 + \theta_2$.

Nous appliquerons, en particulier, le théorème précédent au cas où l'intégrale est étendue à un intervalle (x_0, x). L'ensemble e des considérations précédentes devenant maintenant cet intervalle qui dépend de x, les fonctions F, F_1, F_2 et θ deviennent des fonctions de x, mais cela ne change pas la définition des nombres dérivés. Le théorème précédent prend alors la forme suivante:

Étant données une fonction sommable $f(x)$ et son intégrale, à savoir

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

on peut définir une fonction $\theta(x)$, absolument continue et non décroissante, telle que, n étant aussi grand qu'on veut, les deux fonctions:

$$F_1(x) = F(x) + \frac{\theta(x)}{n}, \qquad F_2(x) = F(x) - \frac{\theta(x)}{n}$$

aient: la première, tous ses nombres dérivés $\geqq f(x)$ en chaque point où cette dernière fonction n'est pas infinie positive; la seconde, les siens $\leqq f(x)$ en chaque point où cette fonction n'est pas infinie négative. Ces fonctions F_1 et F_2 sont les majorante et minorante relatives à F.

La considération des majorante et minorante est précieuse dans beaucoup de questions. Nous allons nous en servir ici pour établir très simplement la formule du changement de variable dans une intégrale étendue à un intervalle.

42. **Changement de la variable d'intégration.*** Soit $f(x)$ une fonction bornée dans un intervalle (a, b). Supposons que l'on pose

$$x = \phi(t),$$

où $\phi(t)$ est une fonction absolument continue de t qui varie de x_0 à x, sans sortir de l'intervalle (a, b), quand t varie de t_0 à t. Je dis que l'on aura, sans aucune autre condition,

$$\int_{x_0}^x f(x)\,dx = \int_{t_0}^t f(\phi)\,\phi'(t)\,dt,$$

l'intégrale en t s'étendant aux seuls points où $\phi'(t)$ existe, c'est-à-dire presque tous.

Posons, en effet,

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x)\,dx, \qquad \Phi(t) = F(\phi) = \int_{x_0}^{\phi(t)} f(x)\,dx.$$

Comme $F(x)$ est une fonction à nombres dérivés bornés et que, par suite, $\Phi(t)$ est une fonction absolument continue de t (qui s'annule pour $t = t_0$),

* J'ai énoncé ce résultat, mais dans une forme trop générale, dans mon *Cours d'analyse*, t. I, 3[e] édition, 1913. La démonstration exposée ici est beaucoup plus simple et je rectifie l'erreur qui m'a été signalée par M. Dunham Jackson (*Voir la Note*, p. 462).

on a immédiatement

$$F(x) = \Phi(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi'(t)\, dt.$$

Il reste seulement à montrer que l'on a presque partout

$$\Phi'(t) = f(\phi)\phi'(t).$$

Cette relation a certainement lieu dans tout intervalle où $\phi(t)$ serait constant, car $\Phi(t)$ le serait aussi, donc ϕ' et Φ' seraient nuls tous deux. Nous pouvons donc écarter les points t qui tombent dans un tel intervalle et admettre que, quand l'accroissement Δt tend vers 0, $\Delta\phi$ n'est jamais définitivement nul.

Ceci entendu, revenons à la formule à démontrer $\Phi' = f\phi'$. Considérons les majorante et minorante relatives à $F(x)$, à savoir

$$F_1(x) = F(x) + \frac{1}{n}\theta(x), \qquad F_2(x) = F(x) - \frac{1}{n}\theta(x).$$

Les nombres dérivés de F_1 seront $\geqq f$ et ceux de F_2 seront $\leqq f$, qui est supposée finie. Posons

$$\Theta(t) = \theta(\phi), \qquad \begin{aligned} \Phi_1(t) &= F_1(\phi) = \Phi + \frac{\Theta}{n}, \\ \Phi_2(t) &= F_2(\phi) = \Phi - \frac{\Theta}{n}. \end{aligned}$$

Les fonctions Θ, Φ_1 et Φ_2 sont absolument continues et ont des dérivées uniques et finies aux points où ϕ, Φ et θ ont de telles dérivées, c'est-à-dire presque partout. Plaçons-nous en l'un de ces points; désignons par ϵ un nombre positif arbitraire; donnons à t un accroissement Δt tendant vers 0, mais de manière que $\Delta\phi$ (ou Δx) ne soit pas nul; et considérons les deux égalités:

$$\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} - (f - \epsilon)\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta F_1}{\Delta x} - f + \epsilon\right)\frac{\Delta\phi}{\Delta t},$$

$$\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} - (f + \epsilon)\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta F_2}{\Delta x} - f - \epsilon\right)\frac{\Delta\phi}{\Delta t}.$$

Quand Δt et Δx tendent vers 0, $\Delta F_1/\Delta x$ finit par surpasser $f - \epsilon$ et $\Delta F_2/\Delta x$ devient $< f + \epsilon$, puisque F_1 et F_2 sont majorante et minorante et que f est finie. Donc les seconds membres des deux égalités sont de signes contraires, et, par conséquent, les limites des premiers membres ne peuvent être de même signe. Ces limites sont respectivement

$$\Phi_1' - f\phi' + \epsilon\phi' = \Phi' - f\phi' + \frac{\theta'}{n} + \epsilon\phi',$$

$$\Phi_2' - f\phi' - \epsilon\phi' = \Phi' - f\phi' - \frac{\theta'}{n} - \epsilon\phi'.$$

Elles ne sont pas de même signe, quelque grand que soit n et quelque petit que soit ϵ. Or ceci n'a lieu que si $\Phi' - f\phi' = 0$, ce qui est la relation à démontrer.

43. **Corollaire.*** *Si x décrit un ensemble E_x de mesure nulle quand t décrit un ensemble E_t de mesure non nulle, $\phi'(t)$ est nul presque partout dans E_t.*

Soit $e(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E_x, donc égale à 1 dans E_x et à 0 en dehors. On a, quel que soit t

$$0 = \int_a^x e(x)\,dx = \int_{t_0}^t e(\phi)\phi'(t)\,dt.$$

Donc la dérivée de cette dernière intégrale est nulle. Mais la dérivée est presque partout $e(\phi)\phi'(t)$. Donc ce produit est nul presque partout et, comme $e(\phi) = 1$ dans E_t, il faut que ϕ' soit nul presque partout dans E_t.

44. **Cas ou $f(x)$, non bornée, est seulement finie et sommable dans (a, b).** La formule du changement de variables suppose $f(x)$ bornée. Considérons maintenant le cas où $f(x)$ est seulement finie et sommable dans (a, b). Supposons encore $\phi(t)$ absolument continue, et demandons-nous dans quel cas la formule de substitution

$$\int_{x_0}^x f(x)\,dx = \int_{t_0}^t f(\phi)\phi'\,dt$$

subsiste.

Si l'on se reporte à la démonstration antérieure, on verra qu'elle s'appuie sur la seule hypothèse que la fonction

$$\Phi(t) = \int_{x_0}^{\phi(t)} f(x)\,dx$$

est absolument continue. Telle est donc la condition générale pour que la formule de substitution soit applicable.

Cette condition sera réalisée, en particulier, si la fonction $\phi(t)$, supposée absolument continue, est, en outre, monotone (N° 40, 5°); et, plus généralement, si l'intervalle (a, b) se partage en plusieurs autres où cette condition a lieu. Mais voici une condition plus générale:

Si $\phi(t)$ est absolument continue, la formule de substitution subsiste pourvu que la fonction $f(\phi)\phi'$ de t soit sommable dans (t_0, t).

Il suffit de prouver ce théorème pour une fonction f positive. Soit alors f_n une fonction égale à f ou à n selon que f est $\leqq$ ou $> n$. On a, sans difficulté pour f_n qui est borné,

$$\int_{x_0}^x f_n\,dx = \int_{t_0}^t f_n(\phi)\phi'\,dt.$$

* Dans mon *Cours d'analyse* cité, j'ai déduit le théorème général de ce cas particulier. C'est la démonstration du théorème énoncé ici comme corollaire qui était trop longue. Je signale que M. B. Porter, de l'Université de Texas, m'a signalé par lettre une démonstration directe beaucoup plus simple de ce théorème.

Faisons tendre n vers l'infini, la fonction $f_n\,\phi'$ reste inférieure en valeur absolue à $f\,|\,\phi'\,|$ qui est positive et sommable. On peut donc passer à la limite sous le signe $\int$, ce qui prouve la proposition.

Cas où f n'est pas finie. Le raisonnement précédent subsiste si $f(x)$ est sommable mais non fini. Seulement en un point où ϕ' est nul, la limite de $f_n\,\phi'$ l'est aussi pour n infini. La formule de substitution subsiste donc lorsque $f\phi'$ est sommable, à condition d'annuler le produit $f\phi'$ avec ϕ' même aux points où f est infinie.

8. Fonctions d'ensemble mesurable (B) continues et additives

45. **Définitions.** Il ne peut être question et il ne sera question, dans le paragraphe actuel, que d'ensembles mesurables (B). Ces ensembles seront supposés bornés et compris dans un intervalle (a, b). Nous considérons une fonction $f(e)$ définie sur de tels ensembles.

La fonction $f(e)$ est *continue* si elle est infiniment petite sur tout ensemble de diamètre infiniment petit.

Elle est *additive* si sa valeur sur e, somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $e', e'', \cdots$ sans points communs est égale à la somme des valeurs de la fonction sur chaque partie.

Elle est *bornée* si sa valeur absolue ne peut surpasser un nombre fixe. Il est clair qu'une fonction d'ensemble, qui est continue et additive dans un intervalle (a, b), est bornée dans cet intervalle.

En effet, puisqu'elle est continue, elle est bornée sur tout intervalle d'amplitude suffisamment petite et l'on peut partager (a, b) en un nombre limité d'intervalles d'amplitude suffisamment petite.

46. **Théorème.** *Une fonction $f(e)$ continue et additive est la différence de deux fonctions de même nature, non négatives.*

Donnons-nous un ensemble E. La fonction $f(e)$ admet une borne supérieure quand e désigne une partie (variable d'une manière quelconque) de E. Cette borne sera $\geqq 0$, car $f(e)$ tend vers 0 avec le diamètre de e, et est supposé nul au cas où e ne contient plus aucun point. Désignons cette borne supérieure par $\phi(E)$.

On s'aperçoit immédiatement que $\phi(E)$ est une fonction de E *non négative* et *continue*.

La fonction $\phi(E)$ est aussi *additive*.

En effet, soit $E = e' + e'' + \cdots$ une somme d'ensembles sans points communs. Désignons par $\mathcal{E}', \mathcal{E}'', \cdots$ des portions variables de $e', e'', \cdots$. Considérons la relation

$$f(\mathcal{E}' + \mathcal{E}'' + \cdots) = f(\mathcal{E}') + f(\mathcal{E}'') + \cdots .$$

On peut faire varier $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$, $\cdots$ de manière à faire tendre à volonté, soit le premier membre, soit le second, vers sa borne supérieure. Donc ces bornes, ne pouvant se surpasser l'une l'autre, sont égales, c'est-à-dire que

$$\phi(E) = \phi(e') + \phi(e'') + \cdots.$$

Il suit des propriétés précédentes que $f(e)$ est la différence des deux fonctions:

$$\phi(e) \quad \text{et} \quad \phi(e) - f(e),$$

toutes deux continues, additives, bornées et non négatives.

La somme de ces deux fonctions,

$$F(e) = 2\phi(e) - f(e),$$

est également continue, additive, bornée et non négative. Sa valeur est au moins égale à la valeur absolue de $f(e)$. On donne à $F(e)$ le nom de *variation totale de* $f(e)$ dans l'ensemble e. Les deux parties $\phi(e)$ et $\phi(e) - f(e)$ sont les *variations positive* et *négative* respectivement.

47. **Théorèmes sur les limites.** *Soit* e_1, e_2, $\cdots$ *une suite illimitée d'ensembles, chacun contenu dans le suivant*; *ensuite* $f(e)$ *une fonction continue, additive et bornée*; *on a, quand* n *tend vers l'infini,*

$$\lim f(e_n) = f(e_1 + e_2 + \cdots).$$

Si, au lieu de cela, chaque ensemble e_n *est contenu dans le précédent, on a*

$$\lim f(e_n) = f(e_1 e_2 \cdots);$$

et, en particulier, si les e_n *sont sans point commun,*

$$\lim f(e_n) = 0.$$

Considérons d'abord le premier cas. Soit e l'ensemble somme $e_1 + e_2 + \cdots$. On a

$$e - e_n = (e_{n+1} - e_n) + (e_{n+2} - e_{n+1}) + \cdots.$$

Ainsi le second membre est le reste d'une série convergente, et il tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc $\lim f(e_n) = f(e)$.

La seconde proposition se ramène à la première. En effet, en vertu de la propriété additive, il suffit d'établir la relation entre les complémentaires

$$\lim f(CE_n) = f(CE_1 + CE_2 + \cdots),$$

ce qui rentre dans la première proposition.

Plus généralement, soit e_1, e_2, $\cdots$ e_n, $\cdots$ *une suite illimitée d'ensembles ayant une limite unique* E (N° 1); *on a*

$$f(E) = \lim f(e_n).$$

Il suffit de faire la preuve pour une fonction f non négative. On peut alors imiter la démonstration donnée (N° 2) pour prouver que mE est la limite de me_n. Nous ne nous servirons pas de cette dernière propriété.

Il y a lieu d'observer que les propositions précédentes définissent un procédé analytique qui permet de calculer $f(E)$ sur tout ensemble mesurable (B) quand on connaît la valeur de $f(E)$ sur les intervalles. En effet, si l'on connaît le procédé de construction de E à partir des intervalles, on en déduit le moyen de calculer $f(E)$, de proche en proche, par des passages à la limite consécutifs. Il suit de là que $f(E)$ est complètement défini par ses valeurs sur les intervalles. Nous allons d'ailleurs retrouver cette propriété d'une autre manière en considérant le cas où f est non négatif. Dans cette hypothèse, le théorème suivant fournit une définition de $f(E)$ qui est très utile dans les démonstrations.

48. **Définition de $f(E)$ non-négatif.** *Supposons la fonction f non-négative. Soit E un ensemble. Nous pouvons l'enfermer dans un ensemble A formé d'une infinité dénombrable d'intervalles. Alors $f(E)$ est la borne inférieure de $f(A)$ sur tous les systèmes A possibles contenant E.*

Puisque la fonction est non-négative et que E est contenu dans A, on a d'abord $f(A) \geqq f(E)$. Il suffit de prouver que la borne inférieure de $f(A)$ ne peut être plus grande que $f(E)$.

Cette propriété est immédiate si E est un ensemble de la première classe (formé de points et d'intervalles), car elle résulte dans ce cas de la continuité de f. Pour établir la propriété en général, il suffit donc de prouver qu'elle subsiste pour une classe d'ordre α, si elle est vraie pour les classes d'ordres moindres. Pour faire cette démonstration, considérons d'abord deux cas particuliers.

Si E est le produit, $P = E_1 E_2 \cdots$, d'une infinité d'ensembles de classes d'ordres moindres, nous désignons par P_n le produit des n premiers facteurs. C'est un ensemble de classe d'ordre $< \alpha$, de sorte que nous avons, par le théorème précédent,

$$f(E) = \lim f(P_n).$$

Mais P_n, étant de classe d'ordre $< \alpha$, peut, par hypothèse, être enfermé dans un ensemble d'intervalles, A_n, de manière que l'on ait

$$f(A_n) - f(P_n) < \frac{1}{n}.$$

Il vient donc, ce qui prouve la proposition,

$$\lim_{n=\infty} f(A_n) = \lim f(P_n) = f(E).$$

Le second cas particulier est celui où E est la somme, $S = E_1 + E_2 + \cdots$, d'une infinité d'ensembles de classes d'ordre $< \alpha$. On peut d'ailleurs supposer ces ensembles sans points communs, car, en soustrayant de chaque ensemble E_n ceux qui précèdent, la différence est encore d'ordre $< \alpha$. Dans cette hypothèse, nous avons

$$f(E) = f(E_1) + f(E_2) + \cdots.$$

Soit ϵ un nombre positif aussi petit qu'on veut, somme d'une série positive, $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots$. Nous pouvons enfermer successivement $E_1, E_2, \cdots$ dans des ensembles d'intervalles, $A_1 A_2, \cdots$ de manière à avoir

$$f(A_1) < f(E_1) + \epsilon_1, \qquad f(A_2) < f(E_2) + \epsilon_2, \qquad \cdots.$$

Mais alors E est enfermé dans l'ensemble d'intervalles $A = A_1 + A_2 + \cdots$ et l'on a (les A_n pouvant d'ailleurs empiéter)

$$f(A) \leqq f(A_1) + f(A_2) + \cdots \leqq f(E_1) + \epsilon_1 + f(E_2) + \epsilon_2 + \cdots \leqq f(E) + \epsilon.$$

Donc, ϵ étant arbitraire, la borne inférieure de $f(A)$ ne peut surpasser $f(E)$.

Considérons enfin le cas général où E s'exprime au moyen d'ensembles d'ordres $< \alpha$ par la formule de structure (N° 3)

$$E = S' P' + S'' P'' + \cdots, \text{ ou, en abrégé, } [SP].$$

Désignons par $[SP_n]$ ce que devient E quand on borne chacun des produits P de la formule à ses n premiers facteurs. Alors E est le produit des ensembles $[SP_1], [SP_2], \cdots$, chacun contenu dans le précédent, de sorte que l'on a

$$f(E) = \lim_{n=\infty} f[SP_n].$$

Comme E est contenu dans $[SP_n]$, on est ramené à prouver que l'on peut enfermer $[SP_n]$ dans un ensemble d'intervalles A, tel que $f(A)$ surpasse aussi peu qu'on veut $f[SP_n]$. Mais ceci résulte de la démonstration faite dans le cas particulier qui précède. En effet, désignons par $[S_m P_n]$ ce que devient $[SP_n]$ quand on borne chaque somme S à ses m premiers termes, nous aurons

$$[SP_n] = [S_1 P_n] + [S_2 P_n] + \cdots,$$

de sorte que $[SP_n]$ est la somme d'une infinité d'ensembles d'ordres $< \alpha$.

49. **Corollaire I.** *Soient $f(e)$ une fonction continue et additive, de signe quelconque, ensuite E un ensemble donné. On peut enfermer E dans un système d'intervalles A de manière que $f(A)$ diffère aussi peu qu'on veut de $f(E)$.*

En effet, soit $F(e)$ la variation totale de f dans e. On peut, en vertu du théorème précédent, enfermer E dans A de manière que l'on ait, quel que soit ϵ positif donné,

$$F(A) - F(E) = F(A - E) < \epsilon;$$

auquel cas on a *a fortiori*

$$|f(A) - f(E)| = |f(A - E)| < \epsilon.$$

50. **Corollaire II.** *Si deux fonctions* $f_1(e)$ *et* $f_2(e)$, *continues et additives, sont égales sur tout intervalle, elles restent égales sur tout ensemble mesurable* (B).

En effet, leur différence $\phi = f_1 - f_2$, est une fonction continue et additive. Elle est nulle sur tout intervalle, donc sur tout système A d'intervalles, donc sur e, car on peut faire tendre $\phi(A)$ vers $\phi(e)$. Il résulte de là *qu'une fonction continue et additive d'ensemble mesurable* (B) *est complètement définie si elle est définie* sur les intervalles.

Après ces généralités, nous pouvons passer à l'étude des nombres dérivés de la fonction.

51. **Théorème.** *Une fonction* $f(e)$, *continue et additive, a ses nombres dérivés finis presque partout et sommables* (Lebesgue).

Comme les nombres dérivés de $f(e)$ ne peuvent surpasser en valeur absolue ceux de sa variation totale $F(e)$, il suffit de faire la démonstration pour cette dernière fonction qui est non-négative.

Soient Λ un nombre dérivé de F, ensuite Λ_n un nombre égal à Λ ou à n selon que Λ est $\leqq$ ou $\geqq n$. Formons la fonction minorante $\phi_2(x)$, relative à l'intégrale étendue à l'intervalle (a, x) ou ω,

$$\int_a^x \Lambda_n \, dx = \int_\omega \Lambda_n \, dx.$$

La différence $F(\omega) - \phi_2(x)$ est une fonction de x dont le nombre dérivé (de même espèce que Λ) n'est pas négatif. Donc, d'après une propriété classique des nombres dérivés (considérés dans un intervalle), cette fonction n'est pas décroissante, donc elle n'est pas négative pour $x > a$; et l'on a, à la limite,

$$F(\omega) \geqq \lim \phi_2(x) = \int_a^x \Lambda_n \, dx.$$

Donc, cette dernière intégrale étant bornée par le premier membre quand n tend vers l'infini, Λ est sommable.

52. **Quelques lemmes préliminaires.**—I. *Soit* $f(e)$ *continue et additive. Si l'un de ses nombres dérivés, le même partout,* Λ, *ne devient pas infini négatif dans un intervalle* (α, β) *ou* ω, *on a*

$$f(\omega) \geqq \int_\omega \Lambda dx.$$

Soit, en effet, (α, x) ou ω' une portion variable de l'intervalle (α, β). Construisons la fonction minorante $\phi_2(x)$ relative à l'intégrale

$$\int_a^x \Lambda dx.$$

La différence $f(\omega') - \phi_2(x)$ est une fonction de x dont le nombre dérivé (de même espèce que Λ) n'est pas négatif dans ω. Donc cette fonction est non décroissante dans ω. Alors il en est de même pour la fonction (limite de la précédente)

$$f(\omega') - \int_a^x \Lambda dx = f(\omega') - \int_{\omega'} \Lambda dx,$$

c'est à dire que

$$f(\omega) - \int_\omega \Lambda dx \geqq 0.$$

II. *Soient $f(e)$ continue et additive, E_1 l'ensemble de mesure nulle où l'un (toujours le même) de ses nombres dérivés est infini négatif. Enfermons E_1 (au sens étroit) dans un ensemble A d'intervalles. Soit CA le complémentaire de A. Nous avons, pour tout intervalle ω,*

$$f(\omega \cdot CA) \geqq \int_{\omega\,.\,CA} \Lambda dx.$$

Soit $F(e)$ la variation totale de f dans e; posons

$$\phi(e) = f(e \cdot CA) + F(eA).$$

Je vais d'abord montrer que cette fonction ϕ ne peut avoir son nombre dérivé $\Lambda(\phi)$ infini négatif. On a, en effet, quel que soit l'ensemble e,

$$\phi(e) \geqq f(e \cdot CA) + f(eA) = f(e);$$

ce qui entraîne

$$\Lambda(\phi) \geqq \Lambda(f).$$

Il s'ensuit que $\Lambda(\phi)$ ne peut être égal à $-\infty$ qu'en un point où $\Lambda(f)$ est *a fortiori* égal à $-\infty$, donc en un point de E. Or un point de E est intérieur à un intervalle de A où $f(e \cdot CA)$ est nul et où $\phi(e)$ se réduit à $F(eA)$ et a, par conséquent, les mêmes nombres dérivés (essentiellement positifs) que F. Donc $\Lambda(\phi)$ ne peut pas être égal à $-\infty$.

Nous pouvons donc appliquer le lemme précédent pour tout intervalle ω. Il vient ainsi, eu égard à $\Lambda(\phi) \geqq \Lambda(f)$,

$$\phi(\omega) \geqq \int_\omega \Lambda(\phi)\, dx \geqq \int_\omega \Lambda(f)\, dx.$$

Cette formule, vraie pour un intervalle ω, subsiste pour un ensemble somme d'intervalles, car il n'y a qu'à additionner les résultats pour chaque intervalle de cet ensemble. Ainsi, soit A_n l'ensemble des n premiers intervalles de A; son complémentaire CA_n est formé aussi d'intervalles; on peut donc remplacer ω par $\omega \cdot CA_n$ dans la formule précédente. Si l'on fait alors tendre n vers l'infini et qu'on passe à la limite, il vient

$$\lim \phi(\omega \cdot CA_n) \geqq \lim \int_{\omega CA_n} \Lambda(f)\, dx = \int_{\omega CA} \Lambda(f)\, dx.$$

Comme CA_n contient CA, l'ensemble $CA \cdot CA_n$ revient à CA; on a donc

$$\phi(\omega \cdot CA_n) = f(\omega \cdot CA) + F(\omega \cdot A \cdot CA_n).$$

Quand n tend vers l'infini, l'ensemble $A \cdot CA_n$ se réduit constamment et tend vers l'ensemble $A \cdot CA$ qui ne contient plus aucun point; donc $F(\omega \cdot A \cdot CA_n)$ tend vers 0. La dernière inégalité se réduit ainsi à celle à démontrer, à savoir

$$f(\omega \cdot CA) \geqq \int_{\omega CA} \Lambda dx.$$

III. *Soit $f(e)$ continue et additive, ensuite E, l'ensemble des points où l'un, toujours le même, Λ, de ses nombres dérivés est infini négatif; on a, dans tout intervalle ω,*

$$f(\omega) \geqq f(\omega E) + \int_\omega \Lambda dx.$$

En effet, enfermons E_1 dans un ensemble d'intervalles A; nous avons, par le lemme précédent,

$$f(\omega) = f(\omega A) + f(\omega CA) \geqq f(\omega A) + \int_{\omega CA} \Lambda dx.$$

Mais E_1 est de mesure nulle et nous pouvons faire tendre mA vers 0 de manière que $f(\omega A)$ tende vers $f(\omega E_1)$ (N° 49). Il vient ainsi, à la limite,

$$f(\omega) \geqq f(\omega E_1) + \int_\omega \Lambda dx.$$

IV. *Soit $f(e)$ continue et additive, ensuite E_1 l'ensemble des points où l'un, Λ, de ses nombres dérivés est infini négatif; on a, pour tout ensemble e mesurable (B),*

$$f(e) \geqq f(eE_1) + \int_e \Lambda dx.$$

En effet, considérons la fonction

$$\phi(e) = f(e) - f(eE_1) - \int_e \Lambda dx.$$

Elle est continue, additive et bornée. Elle n'est négative sur aucun intervalle

ω, en vertu du lemme précédent; donc elle n'est négative sur aucun système A d'intervalles, donc elle ne l'est pas non plus sur un ensemble e, car on peut faire tendre $\phi(A)$ vers $\phi(e)$.

53. **Théorème.** *Soit $f(e)$ continue et additive. Désignons par E' l'ensemble des points où ses nombres dérivés sont infinis positifs tous les quatre ensemble, par E'' l'ensemble des points où ces mêmes nombres sont infinis négatifs tous les quatre ensemble. Soit enfin e un ensemble mesurable* (B). *On a*

$$f(e) \leqq f(eE') + \int_e \Lambda dx, \qquad f(e) \geqq f(eE'') + \int_e \Lambda dx.$$

Démontrons d'abord la seconde inégalité. Désignons par E_1, E_2, E_3, E_4, les ensembles de points où chacun des quatre nombres dérivés de f, à savoir Λ, λ, Λ', λ', est infini negatif; on a, en appliquant le lemme IV qui précède à λ,

$$f(e) \geqq f(eE_2) + \int_e \lambda dx.$$

Faisant ici $e = eE_1$, il vient, cet ensemble étant de mesure nulle,

$$f(eE_1) \geqq f(eE_1 E_2).$$

Ainsi la formule du lemme IV donne *a fortiori*

$$f(e) \geqq f(eE_1 E_2) + \int_e \Lambda dx.$$

Le même raisonnement peut se faire sur les nombres dérivés Λ' et λ', et il conduit à la formule

$$f(e) \geqq f(eE_3 E_4) + \int_e \Lambda' dx.$$

Faisant ici $e = eE_1 E_2$ (de mesure nulle), il vient

$$f(eE_1 E_2) \geqq f(eE_1 E_2 E_3 E_4) = f(eE'').$$

Ainsi, la formule avant-précédente devient *a fortiori*

$$f(e) \geqq f(eE'') + \int_e \Lambda dx.$$

La seconde inégalité du théorème est ainsi établie. Mais la première inégalité n'est pas réellement distincte de la seconde. Elle s'y ramène en remplaçant la fonction f par $-f$, ce qui remplace Λ par $-\Lambda$.* On applique la seconde négalité à $-f$. Changeant alors les signes des fonctions et le sens de l'inégalité, on obtient la première inégalité du théorème.

* Car Λ est un quelconque des nombres dérivés.

54. **Corollaire.** *Si l'ensemble e ne contient aucun point de E' ni de E'', on a*

$$f(e) = \int_e \Lambda dx .$$

En effet, les deux inégalités du théorème précédent se réduisent à

$$f(e) \geqq \int_e \Lambda dx , \qquad f(e) \leqq \int_e \Lambda dx ,$$

ce qui exige l'égalité.

55. **Théorème.** *Soit $f(e)$ continue et additive; ensuite E l'ensemble des points où $f(e)$ a une dérivée unique mais infinie de signe déterminé. On a, sur tout ensemble e mesurable (B),*

$$f(e) = f(eE) + \int_e \Lambda dx .$$

En effet, on a

$$f(e) = f(eE) + f(eCE);$$

et, par le corollaire précédent,

$$f(eCE) = \int_{eCE} \Lambda dx = \int_e \Lambda dx .$$

56. **Fonction des singularités.** L'ensemble E où $f(e)$ a une dérivée unique mais infinie de signe déterminé, *est l'ensemble des singularités.* La fonction $f(eE)$, qui est continue, additive et borneé, est la *fonction des singularités*. L'ensemble et la fonction des singularités ont été ainsi nommés par M. Lebesgue, qui les a définis toutefois d'une manière un peu moins précise et dans le cas d'un nombre quelconque de dimensions.

Si nous représentons, comme plus haut, par E' et E'' respectivement les portions de E sur lesquelles la dérivée est positive ou negative, nous avons

$$f(eE) = f(eE') + f(eE'') .$$

La fonction $f(eE')$ est non-négative, et la fonction $f(eE'')$ non-positive.

En effet, portons la valeur précédente de $f(eE)$ dans la formule du théorème précédent (N° 55); on en tire

$$f(eE') = f(e) - f(eE'') - \int_e \Lambda dx .$$

Or le second membre ne peut être négatif, en vertu du théorème du N° 53. De même, $f(eE'')$ ne peut être positif.

Ainsi $f(eE')$ et $f(eE'')$ sont respectivement les variations positive et négative de f dans eE. Leur différence est la variation totale de f dans eE.

La fonction des singularités a sa dérivée nulle presque partout.

On a, en effet, le nombre dérivé Λ pouvant être remplacé par tout autre,

$$f(eE) = f(e) - \int_e \Lambda dx.$$

Or l'intégrale a une dérivée unique Λ presque partout, donc le nombre dérivé (de l'espèce quelconque Λ) de $f(eE)$ est $\Lambda - \Lambda = 0$ presque partout, ce qui prouve la proposition.

Comme l'intégrale de Λ a le signe de Λ dans tout ensemble où Λ a un signe unique (ou bien est nul), il résulte des conclusions établies plus haut que la variation positive de f dans e est atteinte dans la portion de e où Λ est > 0, sa variation négative dans celle où $\Lambda < 0$. La variation totale est donc donnée par la formule

$$F(e) = f(eE') - f(eE'') + \int_e |\Lambda| dx.$$

Cette formule conduit au théorème suivant:

La variation totale de f a presque partout pour dérivée $|\Lambda|$ et sa fonction des singularités est $f(eE') - f(eE'')$.

Soit, en effet, Λ_1 un nombre dérivé de $F(e)$ et E_1 l'ensemble des singularités de F, en sorte que

$$F(e) = F(eE_1) + \int_e \Lambda_1 dx.$$

Comparant cette équation à la précédente, il vient

$$F(eE_1) - f(eE') + f(eE'') = \int_e (|\Lambda| - \Lambda_1) dx.$$

Remplaçons e par $eE_1 + eE' + eE''$ (de mesure nulle); l'intégrale s'annule et il reste

$$F(eE_1) - f(eE') + f(eE'') = 0,$$

quel que soit e. Alors le second membre de l'équation est nul aussi, et sa dérivée, qui est $|\Lambda| - \Lambda_1$ presque partout, l'est aussi. Donc $\Lambda_1 = |\Lambda|$ presque partout.

De là encore la conclusion suivante:

Chacune des deux fonctions $f(eE')$ et $f(eE'')$ a sa dérivée nulle presque partout.

En effet, $f(eE') - f(eE'')$, qui est la fonction des singularités de F, a sa dérivée nulle presque partout. Mais, comme chacun des deux termes $f(eE')$ et $-f(eE'')$ ne peut avoir de nombre dérivé négatif, la même conclusion s'applique à chaque terme.

57. **Théorème.** *Une fonction continue et additive d'ensemble mesurable (B)*

s'annule nécessairement sur tout ensemble mesurable (B) qui ne contient pas d'ensemble parfait.

Il suffit de considérer une fonction positive. Montrons que, si $f(E)$ est > 0, E contient un ensemble parfait, Considérons la fonction

$$\phi(e) = f(eE).$$

Elle est nulle sur CE. Donc on peut enfermer CE dans un système A d'intervalles ouverts de manière que $\phi(A)$ soit aussi petit qu'on veut, donc $< f(E)$. On a, dans ce cas,

$$f(E) - \phi(A) = f(E) - f(AE) = f(E \cdot CA) > 0.$$

Mais CA est contenu dans E, puisque A contient CE; par suite,

$$f(E \cdot CA) = f(CA) > 0.$$

L'ensemble CA contient donc certainement des points et ne peut être dénombrable (sinon $f(CA)$ serait nul); donc CA, complémentaire d'une somme d'intervalles ouverts, est fermé et contient un ensemble parfait, auquel cas E le contient aussi.

En particulier, si l'une des deux parties $f(eE')$ ou $f(eE'')$ de la fonction des singularités ne se réduit pas identiquement à 0, il faut que E' ou E'' contienne un ensemble parfait.

De là, la conclusion suivante:

58. **Théorème.** *Une fonction d'ensemble, continue et additive, dont la dérivée n'est unique et infinie (de signe déterminé) sur aucun ensemble parfait dans l'intervalle (a, b), est absolument continue dans cet intervalle.*

9. Fonctions continues et à variation bornée d'une variable x. Fonctions d'ensemble mesurable (B) qu'elles définissent

59. **Position de la question.** Soit $f_1(x)$ une fonction continue de x dans un intervalle (a, b) ou Ω. Soit, dans Ω, un intervalle quelconque ω limité aux points α et β. Comme nous l'avons déjà remarqué (N° 37), la fonction $f_1(x)$ définit une fonction $f(\omega)$ d'intervalles, par la relation

$$f(\omega) = f_1(\beta) - f_1(\alpha).$$

Cette fonction d'intervalle est *continue*, c'est-à-dire que sa valeur est infiniment petite sur un intervalle infiniment petit. Elle est *additive* pour deux et, par suite, pour un nombre limité quelconque d'intervalles consécutifs. Cela veut dire que, ω étant la somme de ω', ω'', $\cdots$, on a

$$f(\omega) = f(\omega') + f(\omega'') + \cdots.$$

Cette propriété suffit pour définir la fonction sur tout ensemble $\mathcal{E}$ formé d'un nombre fini d'intervalles ω. La valeur de f sur $\mathcal{E}$ sera la somme de ses valeurs sur les ω, c'est-à-dire que

$$f(\mathcal{E}) = \sum f(\omega);$$

et le résultat est le même pour toutes les manières de décomposer $\mathcal{E}$ dans la somme d'un nombre fini d'intervalles.

Si la fonction $f(\mathcal{E})$ est bornée pour la totalité des ensembles $\mathcal{E}$ formés d'un nombre fini d'intervalles, nous disons que la fonction d'intervalle est *bornée* et que la fonction initiale $f_1(x)$ est *à variation bornée*. Nous supposerons dorénavant que $f_1(x)$ est à variation bornée et que, par conséquent, $f(\mathcal{E})$ est bornée.

Posons-nous maintenant la question suivante:

Étant donnée une fonction $f_1(x)$ continue et à variation bornée ou, ce qui revient au même, une fonction $f(\mathcal{E})$, continue, additive et bornée, existe-t-il une fonction $f(e)$ d'ensemble mesurable (B), continue et additive, qui coïncide avec $f(\mathcal{E})$ sur les intervalles?

L'objet du paragraphe actuel sera de montrer que *la réponse est affirmative* et, à cet effet, nous allons d'abord démontrer un théorème fondamental, qui ramène la solution du problème précédent au cas où la fonction $f(\mathcal{E})$ est non-négative.

60. **Théorème.** *Toute fonction, $f(\mathcal{E})$, d'intervalles, continue, additive et bornée, est la différence de deux fonctions de même nature, non-négatives.*

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble donné somme d'un nombre fini d'intervalles, ensuite $\mathcal{E}'$ un ensemble de même nature compris dans $\mathcal{E}$. La fonction $f(\mathcal{E}')$ admet une borne supérieure quand $\mathcal{E}'$ varie arbitrairement dans $\mathcal{E}$, et cette borne sera $\geqq 0$, car $f(\mathcal{E}')$ est nul quand $\mathcal{E}'$ s'évanouit. Soit $\phi(\mathcal{E})$ cette borne supérieure.

1°. Cette fonction $\phi(\mathcal{E})$ est *bornée,* car elle admet évidemment la même borne supérieure que f; et elle est, en outre, *non-négative.*

2°. Elle est *additive* pour deux, donc pour un nombre fini d'intervalles. En effet, soit ω la somme de deux intervalles ω' et ω''. Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble d'un nombre fini d'intervalles quelconques. On a

$$f(\omega\mathcal{E}) = f(\omega'\mathcal{E}) + f(\omega''\mathcal{E}).$$

Or on peut faire varier $\mathcal{E}$ de manière à faire tendre à volonté, le premier ou le second membre vers sa borne supérieure. Donc ces deux bornes, ne pouvant se surpasser l'une l'autre, sont égales, c'est-à-dire que l'on a

$$\phi(\omega) = \phi(\omega') + \phi(\omega'').$$

3°. La fonction $\phi(\mathcal{E})$ est *continue,* c'est-à-dire que $\phi(\mathcal{E})$ tend vers 0 avec le diamètre de $\mathcal{E}$. Il suffit d'ailleurs de montrer, que, ω étant un intervalle, $\phi(\omega)$ tend vers 0 avec $m\omega$, car, si $\mathcal{E}$ est contenu dans ω, $\phi(\mathcal{E})$ ne peut surpasser $\phi(\omega)$, puisque cette fonction est positive et additive.

Pour démontrer cela, désignons toujours par Ω l'intervalle (a, b). Par définition de $\phi(\Omega)$, on peut, quel que soit ϵ, trouver un ensemble $\mathcal{E}$ tel que l'on ait

$$\phi(\Omega) - f(\mathcal{E}) < \epsilon.$$

On a alors *a fortiori*, dans toute partie ω de Ω,

$$\phi(\omega) - f(\omega\mathcal{E}) < \epsilon.$$

En effet, le premier membre est une fonction d'intervalle, $\psi(\omega)$, qui est positive et additive; donc

$$\psi(\omega) \leqq \psi(\Omega) = \phi(\Omega) - f(\mathcal{E}) < \epsilon.$$

Donc $\phi(\omega)$ diffère aussi peu qu'on veut de $f(\omega\mathcal{E})$ qui est fonction continue de ω, donce $\phi(\omega)$ est fonction continue de ω.

Il suit de là que $f(\mathcal{E})$ est la différence,

$$f(\mathcal{E}) = \phi(\mathcal{E}) - [\phi(\mathcal{E}) - f(\mathcal{E})],$$

de deux fonctions d'intervalles ϕ et $\phi - f$ qui sont continues, additives et non-négatives.

La question de trouver une fonction additive d'ensemble coïncidant avec f sur les intervalles se ramène donc à la solution du même problème pour des fonctions non négatives.

61. **Définition de $f(e)$ sur les ensembles A sommes d'une infinité dénombrable d'intervalles.** Soit $f(\mathcal{E})$ une fonction d'intervalle, non-négative. Occupons-nous d'étendre la définition de cette fonction aux ensembles A, formés d'une infinité dénombrable d'intervalles.

Par définition, $f(A)$ est la somme des valeurs $f(\omega)$ sur l'infinité dénombrable des intervalles ω non empiétants qui composent A; et cette somme est finie par hypothèse, puisque $f(\mathcal{E})$ est bornée. Mais, pour justifier cette définition, il faut montrer qu'elle conduit au même résultat de quelque manière que l'on décompose A en une somme d'une infinité dénombrable d'intervalles. Cette justification comporte donc par le fait l'extension de la propriété additive aux ensembles de l'espèce A. Elle est d'ailleurs une simple conséquence du lemme bien connu de Borel-Lebesgue, comme nous allons le montrer.

Supposons que l'on considère deux décompositions différentes de A en intervalles, à savoir

$$A = \sum\omega = \sum\omega'.$$

Nous allons montrer qu'il est impossible que l'on ait

$$\sum f(\omega') > \sum f(\omega).$$

En effet, si cette inégalité avait lieu, on pourrait trouver un système de ω'

en nombre fini, par exemple ω_1', ω_2', $\cdots$ ω_n', pour lesquels on aurait encore

$$\sum_1^n f(\omega_i') > \sum f(\omega).$$

Or je dis que ceci est en contradiction avec le lemme de Borel-Lebesgue. En effet, nous pouvons enfermer les frontières des intervalles ω dans une infinité dénombrable d'intervalles α, choisis de proche en proche assez petits pour que la somme $\sum f(\alpha)$ reste inferieure à ϵ positif donné. Alors tous les intervalles ω_i' sont formés de points intérieurs (au sens étroit) à un ω ou à un α. On peut donc recouvrir entièrement ω_1', ω_2', $\cdots$ ω_n' avec un nombre limité d'intervalles ω et α: c'est le théorème de Borel-Lebesgue. Maintenant, comme $f \geqq 0$, la somme $\sum_1^n f(\omega_i')$ est $\leqq$ que la somme des $f(\omega)$ et $f(\alpha)$ étendue aux intervalles ω et α qui ont servi au recouvrement et *a fortiori* $\leqq$ que la somme étendue à tous les intervalles ω et α. Il vient donc

$$\sum_1^n f(\omega_i') \leqq \sum f(\omega) + \sum f(\alpha) < \sum f(\omega) + \epsilon.$$

Ceci est en contradiction avec l'inégalité précédente, pourvu qu'on choisisse ϵ suffisamment petit.

Remarque. Si un ensemble A d'intervalles est entièrement recouvert par un système d'ensembles analogues A_1, A_2, $\cdots$, la fonction f étant toujours non-négative, on a

$$f(A) \leqq f(A_1) + f(A_2) + \cdots.$$

En effet, on arriverait à l'égalité en supprimant les empiètements d'intervalles s'il y en a. Or cette suppression ne peut que réduire le second membre.

62. **Définition de f sur un ensemble E quelconque.** Soit E un ensemble mesurable (B) quelconque, et f une fonction non négative. *La valeur $f(E)$ est, par définition, la borne inférieure de $f(A)$ sur tous les systèmes d'intervalles A qui contiennent E.* Nous savons d'ailleurs que, si la fonction existe, elle ne peut pas être définie autrement.

Il reste seulement à montrer que la fonction ainsi définie est additive et, à cette fin, il faut montrer que le calcul de $f(E)$ peut encore se faire par les passages à la limite considérés au paragraphe précédent.

Faisons, dans ce but, deux remarques préliminaires, qui résultent immédiatement de la définition précédente.

Première remarque. Si l'ensemble E contient E', on a $f(E) \geqq f(E')$. En effet, tout ensemble A qui contient E contient E', donc la borne inférieure de $f(A)$ quand A contient E ne peut être moindre que quand A contient seulement E'.

Deuxième remarque. Quels que soient E et E', on a

$$f(E) + f(E') \geqq f(E + E').$$

En effet, si E et E' sont respectivement enfermés dans A et dans A', $E + E'$ l'est dans $A + A'$. Or on a remarqué, à la fin du N° précédent, que l'on a

$$f(A) + f(A') \geqq f(A + A'), \qquad \text{donc} \qquad \geqq f(E + E').$$

Faisons tendre le premier membre vers sa borne inférieure $f(E) + f(E')$, nous obtenons la proposition qu'il fallait démontrer.

63. **Calcul de f par passages a la limite et démonstration de la propriété additive.** Supposons que la propriété additive soit déjà démontrée pour un nombre limité d'ensembles d'ordres $< \alpha$. Nous allons démontrer qu'elle subsiste pour l'ordre α. Nous commençons, pour cela, par justifier trois passages à la limite, comme il suit:

1°. *Soient E_1, E_2, $\cdots$ E_n, $\cdots$ des ensembles d'ordre $< \alpha$, chacun contenu dans le suivant, et E leur somme*; *on a*

$$f(E) = \lim f(E_n).$$

Puisque E contient E_n, $f(E)$ est $\geqq f(E_n)$. Il reste à prouver qu'il ne peut être supérieur à $\lim f(E_n)$. Écrivons

$$E = E_1 + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_2) + \cdots$$

Enfermons successivement E_1, $E_2 - E_1$, $\cdots$ dans des ensembles A_1, A_2, $\cdots$ sommes d'intervalles de manière que l'on ait

$$f(A_1) < f(E_1) + \epsilon_1, \quad f(A_2) < f(E_2 - E_1) + \epsilon_2, \quad \cdots \quad \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots < \epsilon.$$

Comme E est enfermé dans $A_1 + A_2 + \cdots$, nous avons, par la remarque finale du N° 61,

$$f(E) \leqq f(A_1 + A_2 + \cdots) \leqq f(A_1) + f(A_2) + \cdots$$

et *a fortiori*

$$f(E) \leqq f(E_1) + f(E_2 - E_1) + \cdots + \epsilon.$$

Or il est admis que f est additif sur les E_n; cette relation peut donc s'écrire aussi, en remplacant $f(E_2 - E_1)$ par $f(E_2) - f(E_1)$ etc.,

$$f(E) \leqq \lim f(E_n) + \epsilon;$$

et, comme ϵ est arbitraire, on peut le supprimer. Cette démonstration prouve, en particulier, que la propriété additive s'étend à une infinité d'ensembles d'ordres $< \alpha$.

2°. *Si E est la partie commune aux ensembles E_1, E_2, $\cdots$ E_n, $\cdots$, chacun* *contenu dans le précédent, on a*

$$\lim f(E_n) = f(E).$$

En effet, soient CE_n et CE les complémentaires relativement à l'intervalle Ω; on a, par la démonstration précédente,

$$\lim f(CE_n) = f(CE).$$

Par conséquent, f étant additif sur les E_n,

$$\lim f(E_n) = f(\Omega) - \lim f(CE_n) = f(\Omega) - f(CE).$$

Mais, d'après la deuxième remarque du N° précédent, on a

$$f(E) + f(CE) \geqq f(\Omega);$$

donc

$$\lim f(E_n) \leqq f(E).$$

Enfin l'égalité seule est possible, car, E_n contenant E, $f(E_n)$ n'est pas inférieur à $f(E)$.

3°. *Plus généralement, soient S et P des sommes et produits infinis d'ensembles d'ordres $< \alpha$. Si l'ensemble E s'exprime par la formule de structure*

$$E = S' P' + S'' P'' + \cdots = [SP],$$

et qu'on désigne par $[S_m P_n]$ l'ensemble obtenu en limitant les S à leurs m premiers termes, les P à leurs n premiers facteurs, on a, m et n tendant arbitrairement vers l'infini,

$$\lim f[S_m P_n] = f(E).$$

En effet, désignons par $[S_m P]$ et $[SP_n]$ ce que devient $[SP]$ quand on limite les S seuls ou les P seuls. On a respectivement, en vertu des 1° et 2° qui précèdent,

$$\lim f[S_m P] = \lim f[SP_n] = f(E).$$

Quelque petit que soit le nombre positif donné ϵ, on a donc, à partir de valeurs suffisamment grandes de m et de n,

$$f[SP_n] - \epsilon < f(E) < f[S_m P] + \epsilon.$$

Mais alors la différence entre $f[SP_n]$ et $f[S_m P]$ est $< 2\epsilon$, car, comme $[SP_n]$ contient $[S_m P]$, on a $f[SP_n] > f[S_m P]$. Remarquons maintenant que les ensembles E et $[S_m P_n]$ contiennent tous deux $[S_m P]$ et sont contenus tous deux dans $[SP_n]$; donc $f(E)$ et $f[S_m P_n]$ sont tous deux intermédiaires entre $f[S_m P]$ et $f[SP_n]$ dont la différence est $< 2\epsilon$; donc leur différence est $< 2\epsilon$, ce qui prouve la proposition.

4°. *La fonction $f(E)$ reste additive pour un nombre limité d'ensembles de la classe α.*

En effet, soient E et E' deux ensembles d'ordre α, définis par les formules de structure

$$E = [SP], \qquad E' = [S'P'].$$

Nous pouvons poser

$$E_n = [S_n P_n], \qquad E'_n = [S'_n P'_n].$$

La fonction est additive pour ces ensembles-ci d'ordres $< \alpha$, de sorte que nous avons

$$f(E_n) + f(E'_n) = f(E_n + E'_n) - f(E_n E'_n).$$

Mais les ensembles $E + E'$ et EE' ont pour formules de structure

$$E + E' = [SP + S'P'], \qquad EE' = [SS'PP'],$$

où SS' se réduit à une seule somme et PP' à un seul produit. Les ensembles $E_n + E'_n$ et $E_n E'_n$ s'en déduisent par limitation des sommes et produits. Par conséquent, quand n tend vers l'infini, les valeurs de f sur E_n, E'_n, $E_n + E'_n$ et $E_n E'_n$ tendent vers les valeurs de f sur les ensembles limites. Il vient donc, à la limite,

$$f(E) + f(E') = f(E + E') + f(EE'),$$

ce qui prouve la proposition.

Le cas où l'addition se fait sur une infinité d'ensembles rentre, comme nous l'avons déjà fait observer, dans le premier passage à la limite considéré ci-dessus.

Nous pouvons donc conclure:

Toute fonction continue à variation bornée, $f_1(x)$, définit une fonction d'ensembles mesurables (B), qui est continue et additive et à laquelle on peut, par conséquent, appliquer toutes les formules et tous les théorèmes établis dans le paragraphe précédent.

64. **Application de la théorie au cas d'un intervalle.** Résumons maintenant les résultats obtenus dans le paragraphe précédent dans le cas où l'ensemble se réduit à un intervalle (a, x) et dans lequel, par conséquent, ces résultats peuvent s'appliquer directement à la fonction $f_1(x)$. Nous obtenons le théorème suivant:

Une fonction $f_1(x)$ à variation bornée dans un intervalle (a, b), a presque partout une dérivée, $f'(x)$, unique et finie. Cette dérivée est sommable considérée là où elle existe. L'ensemble des points où cette dèrivée est unique mais infinie, est l'ensemble des singularités. Si la dérivee est finie partout où elle existe entre a et x, l'ensemble des singularités disparaît et l'on a

$$f_1(x) - f_1(a) = \int_a^x f'_1(x)\, dx.$$

Plus généralement, par le théorème du N° 58, cette formule subsiste si la dérivée n'est unique et infinie sur aucun ensemble parfait.

Lorsque la fonction des singularités ne s'évanouit pas, sa valeur sur la portion E de l'ensemble des singularités qui est comprise dans un intervalle (a, b), peut être définie plus simplement. Soit $f(e)$ la fonction d'ensemble qui est définie par la fonction à variation bornée $f_1(x)$. Soit ensuite (α, β) ou ω un intervalle dans (a, b); on a

$$f(\beta) - f(\alpha) = f(\omega) = f(\omega E) + \int_\omega f_1'(x)\,dx.$$

Supposons qu'on enferme E, contenu dans (a, b), à l'intérieur d'une somme d'intervalles ω non empiétants. Sommons les équations précédentes pour tous les ω; il vient, puisque E est contenu dans $\Sigma\omega$,

$$\sum [f_1(\beta) - f_1(\alpha)] = f(E) + \sum \int_\omega f_1'(x)dx.$$

Donc, en faisant tendre $\sum m\omega$ vers 0,

$$f(E) = \lim \sum [f_1(\beta) - f_1(\alpha)].$$

Donc *la valeur de f sur l'ensemble des singularités compris à l'intérieur d'un intervalle est la limite de la somme des différences de $f_1(x)$ dans une infinité dénombrable d'intervalles non empiétants, enfermant l'ensemble, et dont la somme des mesures tend vers* 0.

Dans ce qui précède, on a supposé $f_1(x)$ à variation bornée. M. Lebesgue a montré, dans ses *Leçons sur les intégrales définies,* que, *si $f_1(x)$ admet un nombre dérivé fini et sommable dans un intervalle (a, b), cette fonction est à variation bornée* (*et, par suite, absolument continue*). Ce théorème s'obtient facilement par la construction d'une fonction majorante. Soient Λ ce nombre dérivé fini et sommable et $\phi(x)$ la fonction majorante relative à

$$\int_a^x |\Lambda|\,dx.$$

La fonction

$$\phi(x) - f(x),$$

ayant un nombre dérivé partout positif, est une fonction non décroissante $\psi(x)$, d'ailleurs $\phi(x)$ l'est aussi, donc $f(x)$ est la différence, $\phi - \psi$, de deux fonctions non décroissantes, c'est-à-dire une fonction à variation bornée.

65. **Problème de la mesure.** Le problème de la mesure des ensembles peut être considéré comme un cas particulier de celui qui a été résolu dans ce paragraphe.

L'amplitude des intervalles est une fonction continue et additive d'intervalle, qui correspond à la fonction x, la plus simple en quelque sorte des fonctions de x. Le problème de la mesure des ensembles consiste à trouver une fonction continue et additive d'ensemble mesurable (B) qui coïncide avec la précédente sur les intervalles. Ce problème admet une solution et une seule, c'est la mesure au sens de Borel.

La mesure sera, en outre, définie sur tout ensemble mesurable, au sens de Lebesgue, si l'on ajoute la condition que la mesure d'un ensemble ne peut être négative. Tout ensemble mesurable est, en effet, intermédiaire entre deux ensembles mesurables (B) de même mesure.

Nous allons maintenant passer à l'étude du même problème pour les ensembles à plusieurs dimensions et les fonctions de plusieurs variables. Il suffira d'ailleurs d'examiner le cas des ensembles superficiels, car les généralisations sont immédiates.

10. Fonctions continues et additives d'ensemble superficiel

66. **Rappel de la théorie des intégrales multiples.** Nous supposerons que le lecteur connaît la théorie des intégrales multiples de Lebesgue et celle des fonctions absolument continues d'ensemble superficiel. C'est l'extension naturelle des théories correspondantes pour les fonctions d'une variable. Elle est exposée dans le tome II de notre *Cours d'analyse* (2e edition) et nous y renvoyons le lecteur. Il y trouvera, en particulier, la *définition de la dérivée* (*au sens restreint* et *au sens général*) d'une fonction d'ensemble superficiel. Cette définition ne convient plus pour fonder la théorie des fonctions d'ensembles superficiels, qui sont seulement continues (sans l'être absolument). Nous nous proposons de faire ici la théorie de ces fonctions et de montrer qu'en définissant ce que nous appellerons la *dérivée sur un réseau,* il est possible de généraliser tous les résultats obtenus dans le cas d'une seule variable.

Nous commencerons par indiquer la manière de construire un réseau.

67. **Construction d'un réseau.** Nous nous plaçons, pour fixer les idées, dans un espace à deux dimensions. Notre nomenclature se réfère à cette hypothèse, mais les considérations s'étendent aisément au cas général.

Superposons sur le plan xy, parallèlement aux axes, une infinité de grillages à mailles carrées: G_1, G_2, $\cdots$ G_n $\cdots$. Nous supposons que chaque grillage partage les mailles du précédent en un nombre (carré) assigné de parties, soit 2^2, soit 3^2, $\cdots$ ce nombre étant donné. Cet ensemble de grillages constitue *le réseau.* Ce réseau comporte donc une infinité dénombrable de *mailles,* de *barreaux* et de *noeuds.*

Un point P est *ordinaire* s'il n'est situé sur aucun barreau. Il appartient alors à une seule infinité de mailles emboitées les unes dans les autres.

Un point qui n'est pas ordinaire est dit *exceptionnel.* L'ensemble des points exceptionnels est *de mesure nulle,* puisque ces points se trouvent sur une infinité dénombrable de droites ou *barreaux du réseau.* Les points exceptionnels sont de deux sortes: ils peuvent être ou ne pas être des *noeuds.* Si le point n'est pas un noeud, il est sur la frontière de deux familles de mailles emboitées les unes dans les autres. Il est sur la frontière de quatre familles semblables si c'est un noeud.

On sait que la mesure des ensembles se fait en les enfermant dans des ensembles sommes de rectangles, et que les ensembles mesurables (B) se construisent par une succession d'opérations à partir des rectangles. Si l'on se donne un réseau (R), on peut, pour définir la mesure et les ensembles mesurables (B), ne considérer d'autres rectangles que les mailles du réseau. Cela résulte immédiatement de ce que tout rectangle ouvert est la somme d'une infinité dénombrable de mailles du réseau et de ce que la frontière d'un rectangle est la partie commune à une infinité d'ensembles formés de mailles du réseau. La définition d'un ensemble mesurable (B) en partant des mailles exigera donc, au plus, un ou deux passages à la limite supplémentaires et pourra peut-être modifier la classification. Mais le principe de la classification restera le même et tout ensemble mesurable (B) s'exprimera, en fonction des ensembles de classes moindres, par une *formule de structure* entièrement semblable à celle que nous avons établie au début de ce Mémoire pour les ensembles linéaires.

Avant de passer à la définition de la dérivée sur un réseau, nous allons indiquer quelques propriétés des fonctions continues et additives, qui généralisent celles obtenues dans le cas des ensembles linéaires. Nous supprimons d'ailleurs les démonstrations quand l'extension est immédiate.

68. **Propriétés immédiates des fonctions continues et additives.** Une fonction d'ensemble $f(e)$, est *continue* et *additive* comme dans le cas où l'ensemble est linéaire. Nous disons que la fonction est *continue* si $f(e)$ est infiniment petit avec le diamètre de e. Nous considérons exclusivement des ensembles bornés et compris à l'intérieur d'un rectangle assigné. Dans ce cas, une fonction continue et additive est évidemment *bornée,* car elle est bornée sur un ensemble de diamètre $< \epsilon$ suffisamment petit, et tout ensemble borné se décompose en un nombre limité d'ensembles de diamètres $< \epsilon$.

Nous avons alors les propriétés suivantes:

1°. *Une fonction continue et additive est la différence,* $\phi - \psi$, *de deux fonctions de même nature, non négatives: l'une* ϕ *est sa variation positive, l'autre* ψ *sa variation négative; la somme* $\phi + \psi$ *est sa variation totale.*

2°. *Si l'ensemble* e *est la somme d'une suite d'ensembles:* $e_1, e_2, \cdots e_n, \cdots$, *chacun contenu dans le suivant; ou bien si* e *est le produit des ensembles:* $e_1, e_2, \cdots e_n, \cdots$, *chacun contenu dans le précédent, on a*

$$f(e) = \lim f(e_n).$$

3°. *Si* f *est une fonction non négative et si l'on construit un réseau,* R, *la valeur* *de f sur l'ensemble e mesurable (B) est la borne inférieure de $f(A)$ sur tous les ensembles A formés d'une infinité dénombrable de mailles du réseau et contenant e.*

4°. *Si f est de signe variable, on peut faire tendre mA vers me de telle manière que $f(A)$ ait pour limite $f(e)$.*

5°. *Deux fonctions continues et additives qui coïncident sur les mailles d'un réseau, coïncident sur tout ensemble mesurable (B).*

Tous ces théorèmes s'établissent comme les théorèmes analogues dans le cas des ensembles linéaires. Nous avons seulement remplacé les intervalles par les mailles du réseau, ce qui n'introduit aucune difficulté, pourvu que deux mailles contiguës soient non empiétantes. Nous réaliserons cette condition en convenant que les frontières de gauche et d'au-dessous d'une maille ω font partie de cette maille à l'exclusion des deux autres. Avec cette convention, la fonction $f(e)$ est additive pour les mailles du réseau.

69. **Dérivées sur un réseau.** Soit $f(e)$ une fonction continue et additive d'ensemble superficiel. Construisons un réseau R. Soit alors P un point ordinaire: il est intérieur à une seule maille de chaque grillage, donc à une seule famille de mailles emboitées les unes dans les autres. Les *dérivées supérieure* et *inférieure* de $f(e)$ au point P sont, par définition, les plus grande et plus petite limites du quotient

$$\frac{f(\omega)}{m\omega},$$

quand ω parcourt toute la série décroissante des mailles de la famille. Il y a donc deux dérivées sur le réseau au point P, une de chaque espèce.

Si le point P est exceptionnel sans être un noeud, il est limite de deux familles de mailles emboitées les unes dans les autres. Elles sont situées l'un au dessus et l'autre au-dessous du point P, si P est sur un barreau horizontal; l'une à droite et l'autre à gauche, si le barreau est vertical. Chaque famille, considérée isolément définit une dérivée supérieure et une dérivée inférieure: il y a donc deux dérivées supérieures et deux inférieures au point P. Ce point compte, en quelque sorte, pour deux points ordinaires.

Si enfin P est un noeud, il est à la frontière de quatre familles de mailles emboitées. Ces familles, orientées de quatre façons différentes par rapport au point P, définissent quatre dérivées supérieures et quatre inférieures au point P. Ce point compte alors pour quatre.

70. **Mesurabilité des dérivées.** Il faut d'abord préciser. Supposons que, dans la définition d'une dérivée (la supérieure, par exemple), on convienne de choisir toujours la famille de mailles qui est orientée de la meme façon par rapport au point P quand le choix se présente. On pourra, en particulier, choisir toujours celle qui est au-dessus ou celle qui est à droite du barreau passant par P. *La dérivée ainsi uniformisée est une fonction mesurable (B).*

En effet considérons les mailles ω d'un grillage particulier G_n. Chacune d'elles comporte deux de ses frontières. Mais on peut convenir de choisir ces frontières de manière que ω fasse partie de la famille de mailles choisie pour définir la derivée, en un point quelconque de ces deux frontières. Il suffit, en effet, de fixer le choix de la famille de mailles et le choix des frontières par la même loi d'orientation. Cet accord étant fait, définissons, en tout point P, une fonction $\phi_n(P)$ constante dans une même maille ω et égale, dans toute l'étendue de cette maille, à $f(\omega) : m\omega$. Cette fonction $\phi_n(P)$ est mesurable (B); donc les deux dérivées le sont aussi, car ce sont les plus grande et plus petite limites de ϕ_n quand n tend vers l'infini. En particulier, l'ensemble des points où l'une des dérivées (n'importe laquelle et pas nécessairement la même partout) est $> A$, est mesurable (B) comme somme d'ensembles mesurables (B).

71. **Principe fondamental relatif aux dérivées sur un réseau.** La propriété fondamentale des nombres dérivés d'une fonction continue, $f(x)$, d'une seule variable x, est que $f(x)$ ne peut décroître dans un intervalle où l'un de ses nombres dérivés est non négatif. Autrement dit, une fonction d'ensemble linéaire n'est pas négative dans un ensemble où sa dérivée ne l'est pas. Il n'existe pas de principe analogue pour les ensembles à plusieurs dimensions, si l'on garde la définition primitive de la dérivée. Le principe subsiste, au contraire, avec la définition de la dérivée sur un réseau. Au fond, M. Lebesgue a déjà fait une remarque équivalente dans son Mémoire *sur l'intégration des fonctions discontinues*, mais sans y insister. Voici ce principe:

Soit $f(e)$ une fonction continue et additive d'ensemble superficiel. Si sa dérivée supérieure (inférieure) sur le réseau n'est négative en aucun point d'une maille ω du réseau ni de toute sa frontière, $f(\omega)$ ne peut être négatif.

En effet, si $f(\omega)$ était négatif, on pourrait assigner un nombre positif k tel qu'on ait l'inégalité

$$f(\omega) < -km\omega.$$

Nous allons montrer que cela entraîne l'existence d'un point P (de ω ou de sa frontière) où les dérivées sont négatives, contrairement à l'hypothèse. Pour fixer les idées, supposons que ω soit une maille du grillage G_1; alors il y a, dans ω, au moins une maille ω_2 du grillage G_2 vérifiant la même inégalité; dans celle-ci, une maille ω_3 du grillage G_3 vérifiant toujours l'inégalité, et ainsi de suite. Ces mailles $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n, \cdots$ emboitées, convergent vers un point P de ω ou de sa frontière, et constituent une famille propre au calcul de la dérivée au point P. Les dérivées supérieure et inférieure calculées avec cette famille seront donc négatives.

Cette démonstration met en évidence qu'en un point exceptionnel on doit tenir compte de la multiplicité des dérivées de même espèce et que, en un point de la frontière de ω, les familles de mailles intérieures à ω sont seules à considérer. Ce principe permet d'établir aisément les théorèmes préliminaires de la théorie des fonctions d'ensemble continues et additives.

72. **Théorèmes préliminaires.**—I. *Si $f(e)$ est continue et additive dans une maille ω d'un réseau R, ses dérivées sur ce réseau sont sommables dans ω.*

Il suffit d'établir ce théorème pour la variation totale, donc pour une fonction non négative. Supposons donc que f soit non négative et admette la dérivée (supérieure ou inférieure) Λ sur le réseau.

L'ambiguité de Λ aux points exceptionnels (formant un ensemble de mesure nulle) est sans conséquence pour l'intégration. Définissons une fonction bornée, Λ_n, égale à 0 aux points exceptionnels, égale à Λ ou à n ailleurs (selon que Λ est $\leqq n$ ou $\geqq n$). Formons alors la fonction minorante $\phi_2(e)$ relative à $\int \Lambda_n \, dP$. (Il est à peine besoin d'observer que l'extension de majorante et minorante au cas du plan est immédiate.) La fonction

$$f(e) - \phi_2(e)$$

n'aura pas sa dérivée (de l'espèce Λ) négative dans la maille ω (ni sur sa frontière). Donc $f(\omega) - \phi_2(\omega)$ n'est pas négatif, ni sa limite non plus; c'est-à-dire qu'on a

$$f(\omega) - \int_\omega \Lambda_n \, dP \geqq 0.$$

Donc cette intégrale est bornée quand n tend vers l'infini, ce qui prouve que Λ est sommable.

II. *Soit $f(e)$ continue et additive; si sa dérivée supérieure n'est infinie négative en aucun point de la maille ω ni de sa frontière, on a*

$$f(\omega) \geqq \int_\omega \Lambda dP,$$

Λ désignant la dérivée supérieure ou inférieure de $f(e)$.

On peut admettre dans la démonstration que Λ est la dérivée supérieure, car le théorème subsistera *a fortiori* pour la dérivée inférieure. Alors la démonstration se fait comme pour les ensembles linéaires. (N° 52, I.)

III. *Soit E_1 l'ensemble des points où l'une au moins des dérivées supérieures est infinie négative; soit ensuite Λ l'une quelconque des dérivées; on a, dans toute maille ω du réseau,*

$$f(\omega) \geqq f(\omega E_1) + \int_\omega \Lambda dP;$$

par conséquent, aussi dans tout ensemble mesurable (B),

$$f(e) \geqq f(eE_1) + \int_e \Lambda dP.$$

Même démonstration que pour les ensembles linéaires (N° 52, II, III et IV).

Nous allons maintenant considérer deux réseaux R_1 et R_2 simultanément. Ces réseaux seront supposés *distincts,* c'est-à-dire sans barreaux communs (dans le domaine considéré). Cette condition est facile à réaliser: par exemple, on peut définir R_2 en déplaçant R_1 d'une longueur irrationnelle dans le sens de chaque axe.

IV. *Soit E'' l'ensemble des points où $f(e)$ a l'une au moins de ses dérivées supérieures infinies dans chacun des deux réseaux distincts R_1 et R_2 respectivement; soit ensuite Λ une dérivée quelconque dans l'un quelconque des deux réseaux; on a*

$$f(e) \geqq f(eE'') + \int_e \Lambda dP.$$

Désignons respectivement par Λ_1 et Λ_2 les dérivées Λ dans R_1 et dans R_2. Soient E_1 et E_2 les ensembles où les dérivées supérieures sont infinies respectivement dans R_1 et dans R_2; on a, par le théorème précédent,

$$f(e) \geqq \begin{cases} f(eE_1) + \int_e \Lambda_1 \, dP, \\ f(eE_2) + \int_e \Lambda_2 \, dP. \end{cases}$$

On remplace e par eE_1 dans la seconde inégalité; il vient, cet ensemble étant de mesure nulle,

$$f(eE_1) \geqq f(eE_1 E_2) = f(eE'').$$

Le théorème résulte donc *a fcrtiori* de la première inégalité, car on peut supprimer l'indice de Λ, à cause de la symétrie.

V. *Soit E' l'ensemble des points où $f(e)$ a une dérivée inférieure infinie positive dans chacun des deux réseaux distincts R_1 et R_2 simultanément; on a, Λ désignant la dérivée supérieure ou inférieure dans l'un des deux réseaux,*

$$f(e) \leqq f(eE') + \int_e \Lambda dP.$$

Ce théorème se ramène au précédent en changeant le signe de f.

VI. *Si e ne contient aucun point de E' ni de E'', on a, la dérivée Λ étant supérieure ou inférieure,*

$$f(e) = \int_e \Lambda dP.$$

C'est la conséquence des deux théorèmes précédents.

Il est essentiel d'observer que les deux ensembles E' et E'' sont sans point commun. C'est pour réaliser cette condition que nous avons introduit deux réseaux distincts. Tout point est alors ordinaire par rapport à l'un des deux réseaux au moins. Dans ce cas, un point P ne peut appartenir à la fois à E' et à E'', car, si P est ordinaire par rapport à R_1 et appartient à E', sa dérivée inférieure dans R_1 est infinie positive, donc sa dérivée supérieure dans R_1 l'est *a fortiori* et P ne peut appartenir a E''.

Nous avons ainsi généralisé tous les résultats relatifs aux ensembles linéaires et nous pouvons conclure:

73. **Théorème définitif.** *Soit $f(e)$ continue et additive. Construisons deux réseaux distincts R_1 et R_2. Soit E' l'ensemble des points où une dérivée inférieure de $f(e)$ est infinie positive dans les deux réseaux à la fois, E'' l'ensemble des points où une dérivée supérieure est infinie négative dans les deux réseaux à la fois; soient ensuite E la somme des deux ensembles précédents, Λ une dérivée de $f(e)$ dans l'un des deux réseaux; on a*

$$f(e) = f(eE) + \int_e \Lambda dP.$$

L'ensemble E qui est de mesure nulle est *l'ensemble des singularités.* La fonction, continue et additive, $f(eE)$ est la *fonction des singularités.* Elle se décompose dans la différence de deux fonctions de même nature, non négatives, par la formule

$$f(eE) = f(eE') + f(eE'').$$

La *variation totale* $F(e)$ de f est donnée par la formule

$$F(e) = f(eE') - f(eE'') + \int_e |\Lambda| dP.$$

On en conclut, comme dans le cas des ensembles linéaires, que $f(eE') - f(eE'')$ est la fonction des singularités relative à $F(e)$ et que chacune des deux fonctions $f(eE')$ et $f(eE'')$ a ses dérivées nulles presque partout sur les deux réseaux à la fois. Il suit encore de là que $f(e)$ a presque partout Λ pour dérivée unique sur les deux réseaux à la fois.

74. **Généralisation.** Nous avons considéré, dans ce qui précède, deux réseaux R_1 et R_2. Au lieu de cela, nous pourrions en considérer une infinité dénombrable: $R_1, R_2, \cdots R_n, \cdots$. Le même raisonnement que nous avons fait pour deux réseaux R_1 et R_2 s'étend, de proche en proche, à toute la suite. On peut se servir de ce procédé pour réduire à un ensemble moindre l'ensemble des singularités considéré dans le N° précédent. Ainsi les formules subsistent en prenant pour E' l'ensemble des points où la dérivée inférieure est infinie positive sur tous les réseaux à la fois, et en prenant pour E'' celui où la dérivée supérieure est infinie négative sur tous les réseaux. Il s'en suivra encore que

$f(e)$ a pour dérivée Λ presque partout, à la fois sur tous les réseaux de la série considérée.

Il est naturel de se demander si $f(e)$ n'a pas pour dérivée Λ presque partout pour tous les réseaux possibles. Mais l'ensemble des réseaux possibles n'est pas dénombrable et le raisonnement précédent ne s'applique plus. La méthode précédente ne permet donc pas de répondre à cette question.

11. Fonctions continues et à variation bornée de deux variables x et y

75. Fonction d'ensemble définie par une fonction a variation bornée de deux variables. Soit $f_1(x, y)$ une fonction continue de x et y. Cette fonction peut servir à définir une fonction de rectangles ω par le procédé suivant. Soient x et y les plus petites coordonnées dans ω, h et k les deux côtés de ω. On définit $f(\omega)$ par le formule

$$f(\omega) = f_1(x+h, y+k) - f_1(x, y+k) - f_1(x+h, y) + f_1(x, y);$$

ou, avec la notation des différences secondes,

$$f(\omega) = \Delta^2 f_1(x, y).$$

Si h ou k tend vers 0, $f(\omega)$ tend vers 0; on regardera donc $f(\omega)$ comme nul si ω se réduit à la frontière d'un rectangle ou se réduit à un point.

La fonction $f(\omega)$ est une fonction continue de rectangles, ce qui veut dire qu'elle est infiniment petite avec les côtés de ω. Elle est additive, pour la décomposition de ω en deux, donc en un nombre fini quelconque de rectangles. Cela suffit pour définir, sans ambiguité, f sur tout ensemble $\mathcal{E}$ formé d'un nombre fini de rectangles ω. On pose

$$f(\mathcal{E}) = \sum f(\omega).$$

Si la fonction $f(\mathcal{E})$ est bornée pour la totalité des ensembles sommes d'un nombre fini de rectangles, on dit que la fonction initiale, $f_1(x, y)$, est *à variation bornée* dans le domaine considéré.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant:

Toute fonction continue et à variation bornée définit une fonction d'ensemble mesurable (B) qui est continue et additive et qui coïncide avec $f(\mathcal{E})$ sur les rectangles.

Ce théorème se démontre comme dans le cas des ensembles linéaires, mais il est inutile de raisonner sur des rectangles quelconques. Si l'on construit un réseau (R), il suffit de raisonner sur les mailles de ce réseau.

Soit donc $f(\mathcal{E})$ une fonction continue, additive et bornée sur tout ensemble $\mathcal{E}$ formé d'un nombre fini de mailles du réseau. On prouve d'abord qu'elle est la différence de deux fonctions de même nature, non négatives, de sorte qu'il suffit de raisonner sur une fonction non négative. Soit donc $f(\mathcal{E})$ une fonction non négative. Si A est un ensemble formé d'une infinité dénombrable de mailles ω du réseau, on définit encore $f(A)$ comme étant la somme des valeurs $f(\omega)$ sur toutes les mailles ω qui composent A.

Enfin, dans le cas général, on définit $f(e)$ comme étant la borne inférieure de $f(A)$ sur tous les ensembles A, sommes de mailles, qui contiennent e.

On prouve, comme dans le cas des ensembles linéaires, que la fonction d'ensemble ainsi obtenue est continue et additive. On peut donc lui appliquer toutes les formules de la théorie précédente.

76. **Simplifications dues à la continuité par rapport à x, y.** Dans le cas actuel, il y a toutefois certaines simplifications qui se présentent et qui méritent d'être signalées. Elles sont dues à la continuité de $f_1(x, y)$. Nous avons fait remarquer, au début, que la fonction de rectangles $f(\mathcal{E})$, qui est au point de départ de la théorie, s'annule sur les frontières des rectangles et, en particulier, sur les frontières des mailles du réseau. Cette propriété appartient donc à la fonction d'ensemble $f(e)$. La valeur de f sur une maille ω est donc la même que les frontières fassent ou ne fassent pas partie de ω, et la difficulté relative aux frontières disparaît.

La même propriété entraîne une seconde simplification. La fonction $f(e)$ s'annule sur tout barreau du réseau, donc sur tout ensemble de points situés sur un barreau, donc sur tout ensemble de points exceptionnels, puisque la totalité des barreaux est dénombrable. Donc, dans l'étude de $f(e)$, on peut négliger les points exceptionnels et les supprimer de l'ensemble des singularités. Il devient inutile d'introduire deux réseaux pour séparer l'ensemble des singularités E en ses deux parties E' et E''. Un seul réseau suffit, car, comme on se borne aux points ordinaires, on n'a qu'une seule dérivée supérieure et une seule dérivée inférieure en chaque point. On forme E' avec ceux où la dérivée est unique et positive, E'' avec ceux où la dérivée est unique et négative, et ces deux ensembles sont sans point commun.

77. **Fonctions ayant une dérivée finie et sommable.** Indiquons pour finir un théorème qui généralise un théorème de Lebesgue, relatif aux fonctions d'une variable, qui a été énoncé précédemment. Considérons une fonction $f(x, y)$ continue dans une maille Ω d'un réseau R. Elle définit, comme on l'a expliqué précédemment, une fonction $f(\omega)$ des mailles du réseau. Ne faisons pas l'hypothèse que $f(\omega)$ soit bornée. La définition de $f(\omega)$ suffit pour calculer ses dérivées sur le réseau. Le principe fondamental, établi précédemment pour la dérivée sur un réseau, s'applique, sans aucune difficulté, à une fonction qui n'est définie que comme fonction de mailles: *cette fonction ne peut être négative dans un ensemble où sa dérivée ne l'est pas.*

Voici maintenant le théorème annoncé:

Soit $f_1(x, y)$ une fonction continue dans une maille Ω d'un réseau R. Si la fonction de mailles $f(\omega)$ qu'elle définit a sa dérivée supérieure (inférieure) sur le réseau finie et sommable dans Ω, la fonction $f_1(x, y)$ est à variation bornée, donc absolument continue aussi, dans Ω.

En effet, soit Λ la dérivée considérée; construisons la majorante $\phi(\omega)$ relative à l'intégrale

$$\int_\omega |\Lambda| \, dP.$$

La fonction de mailles

$$\phi(\omega) - f(\omega) = \psi(\omega)$$

aura sa dérivée (de l'espèce Λ) partout positive dans Ω: elle est donc non négative. Ainsi $f(\omega)$ est la différence, $\phi - \psi$, de deux fonctions non négatives et est, par conséquent, bornée dans Ω, car elle ne surpasse pas $\phi(\Omega) + \psi(\Omega)$. Donc $f_1(x, y)$ est à variation bornée dans Ω.

78. **Problème de la mesure.** Le problème de la mesure des ensembles est le cas particulier le plus simple du problème général traité dans ce chapitre. Il consiste à trouver la fonction d'ensemble définie par la fonction xy dans le cas de deux dimensions, par la fonction xyz dans le cas de trois, et ainsi de suite.

12. Changement de variables dans les intégrales doubles

79. **Correspondance de deux ensembles.** Soient (x_1, x_2) les coordonnées d'un point P_x dans un plan x, (y_1, y_2) les coordonnées d'un point P_y dans un plan y. Considérons deux ensembles de points correspondants, l'un E_x dans le plan x, l'autre E_y dans le plan y. Cette correspondance est susceptible de certains caractères fondamentaux que nous allons définir.

La correspondance est *uniforme dans les deux sens* si les points se correspondent un à un dans les deux ensembles.

La correspondance est *continue dans les deux sens*, si, étant donnés deux points correspondants P'_x et P'_y, à un point infiniment voisin de l'un correspond, dans tous les cas, un point infiniment voisin de l'autre. Cela n'entraîne pas l'uniformité de la continuité (sauf pour les ensembles fermés).

Ces caractères sont définis depuis longtemps. Nous allons en introduire un nouveau. Nous dirons que la correspondance est *régulière* (B) si à tout ensemble e_y mesurable (B), contenu dans E_y correspond dans E_x un ensemble e_x également mesurable (B), et réciproquement.

Voici un théorème préliminaire:

Si deux ensembles E_x et E_y se correspondent d'une manière continue et uniforme dans les deux sens et si l'un est fermé, l'autre l'est aussi (à cause de la continuité) *et la correspondance est régulière (B).*

En effet, soit e_y un ensemble mesurable (B) contenu dans E_y. Cet ensemble se construit à partir des rectangles fermès, α, par une certaine suite d'opérations. Soit α_x l'ensemble qui correspond (dans E_x) à l'ensemble αE_y (compris dans E_y). Cet ensemble est fermé (car αE_y est dans ce cas) et, par conséquent, il est mesurable (B). Mais e_x se construit avec les α_x par les mêmes opérations que e_y avec les α; donc e_x est mesurable (B).

Du théorème précédent nous allons déduire le suivant:

Si deux ensembles mesurables, E_x et E_y se correspondent d'une manière continue et uniforme dans les deux sens, on peut extraire de chacun d'eux respectivement des ensembles mesurables (B), de mêmes mesures, entre lesquels la correspondance est réguliere (B).

Considérons d'abord le cas où les deux ensembles sont de mesure non nulle. Soit ϵ un nombre positif inférieur à ces deux mesures. Nous pouvons enfermer le complémentaire de E_y dans un ensemble A_y, formé d'une infinité dénombrable de rectangles ouverts, dont la mesure surpasse celle de CE_y au plus de ϵ. Alors le complémentaire de A_y est un ensemble fermé, F'_y, contenu dans E_y et de mesure $> mE_y - \epsilon$. Soit F'_x son correspondant dans E_x. Ce correspondant est fermé aussi, à cause de la continuité. De la même façon, nous pouvons extraire de E_x un ensemble fermé, F''_x, de mesure $> mE_x - \epsilon$, dont le correspondant F''_y dans E_y sera fermé. Ceci fait, les deux ensembles correspondants, respectivement formés par l'addition des précédents,

$$F_y = F'_y + F''_y, \qquad F_x = F'_x + F''_y,$$

sont encore fermés, ont des mesures au moins égales à celles de F'_y et F''_x et se correspondent régulièrement puisqu'ils sont fermés.

Soit $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots$ une suite positive tendant vers zéro. Pour chaque ϵ de la suite, nous pouvons construire un F_x et un F_y satisfaisant aux conditions précédentes. Faisons alors leurs sommes:

$$E'_y = \sum F_y, \qquad E'_x = \sum F_x;$$

les deux ensembles E'_y et E'_x mesurables (B), se correspondront encore régulierement, mais ils auront mêmes mesures que E_y et E_x respectivement.

Si E_x était de mesure nulle mais non E_y, on supprimerait seulement les considérations relatives à E_x dans la construction précédente et l'on ferait $E'_y = \sum F'_y$. Si les deux ensembles étaient de mesure nulle, on formerait respectivement E'_x et E'_y avec un point correspondant de chaque ensemble E_x et E_y.

80. **Différentiabilité.** Je me servirai, dans ce paragraphe, de la définition de la différentiabilité due à Stolz, dont M. Young surtout a montré l'utilité et que j'ai adoptée dans mon *Cours d'Analyse*. Cette définition va montrer sa supériorité, une fois de plus, dans la question actuelle.

Considérons une fonction continue x de deux variables y_1 et y_2,

$$x = \phi(y_1, y_2).$$

Cette fonction est dite *différentiable* en un point P de coordonnées y_1, y_2, si, Δy_1 et Δy_2 désignant les accroissements de y_1 et y_2, l'accroissement correspondant Δx peut être mis sous la forme

$$\Delta x = a\Delta y_1 + b\Delta y_2 + \epsilon\rho,$$

où l'on désigne par ρ la quantité $\sqrt{\Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2}$, par a et b des coefficients indépendants des Δ et par ϵ une quantité infiniment petite avec ρ.

Au lieu de faire varier le point (y_1, y_2) de toutes les manières possibles autour du point P, on peut n'envisager que les seuls points qui font partie d'une ensemble assigné E_y dans le plan des y. Si P est un point limite des E_y et si l'accroissement Δx se met sons la forme précédente quand le point P varie exclusivement sur E_y, nous dirons que la fonction x des y est *différentiable sur* E_y au point P.

Si x est différentiable sur E_y en chaque point de E_y, nous dirons que x est *différentiable sur* E_y *dans tout* E_y.

Considérons maintenant les formules de substitution:

$$x_1 = \phi(y_1, y_2), \qquad x_2 = \psi(y_1, y_2); \tag{1}$$

et supposons qu'elles fassent correspondre, d'une manière continue et uniforme dans les deux sens, les points P_x et P_y de deux ensembles E_x et E_y. Nous avons le théorème suivant:

Si les formules (1) *sont différentiables sur* E_y *en un point* P_y *où le jacobien* J *de la substitution n'est pas nul, alors* y_1 *et* y_2 *sont réciproquement des fonctions des* x *différentiables sur* E_x *au point correspondant* P_x *et leur jacobien en ce point est* $1 : J$.

Supposons, pour abréger l'écriture, que les points correspondants P_x et P_y soient respectivement les origines des x et des y, auquel cas les accroissements de ces variables se confondent avec ces variables elles-mêmes.

Les formules (1) étant différentiables sur E_y à l'origine, nous avons, au voisinage de ce point,

$$\begin{cases} x_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2 + \epsilon_1 \rho, \\ x_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2 + \epsilon_2 \rho, \end{cases} \tag{2}$$

où les a, b, sont des coefficients, ρ le rayon vecteur du point (y_1, y_2), et ϵ une quantité infiniment petite par rapport à ρ. Soit J le jacobien $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$, supposé différent de 0. Si l'on résout les équations par rapport à

y_1 et y_2, il vient, les ϵ étant toujours infiniment petits avec ρ.

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{A_1 x_1 + B_1 x_2 + \epsilon' \rho}{J}, \\[2ex] y_2 = \dfrac{A_2 x_1 + B_2 x_2 + \epsilon'' \rho}{J}. \end{cases}$$

Ces formules prouvent que y_1 et y_2 sont différentiables à l'origine, si toutefois l'on peut y remplacer le rayon vecteur ρ de (y_1, y_2) par celui r de (x_1, x_2). On le peut effectivement si r n'est pas infiniment petit par rapport à ρ. Vérifions-le. D'abord ρ est infiniment petit avec r, à cause de la continuité, et les formules (3) ont lieu. Si r était alors infiniment petit par rapport à ρ, x_1 et x_2 (de modules $< r$) le seraient aussi, donc aussi y_1 et y_2, en vertu des formules (3), ce qui est absurde.

Enfin, les formules (3) provenant de la résolution de (2), leur jacobien est $1 : J$.

Faisons encore un remarque sur la substitution (2). Considérons, dans le plan x, le point auxiliaire (ξ_1, ξ_2) lié à (y_1, y_2) par la substitution linéaire, approchée de (2),

$$\xi_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2, \qquad \xi_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2.$$

Ces formules font correspondre à un carré ω de côté k dans le plan y, un parallélogramme ω', dans le plan x, d'aire $\omega \mid J \mid$. Supposons le carré ω infiniment petit et contenant le point P. Alors le point (x_1, x_2) défini par la substitution (2) ne peut s'écarter du point (ξ_1, ξ_2) que d'une quantité infiniment petite par rapport au côté k de ω. Il ne sortira donc pas d'un parallélogramme ω'' qui déborde ω' d'une aire infiniment petite par rapport à ω. De là, le théorème suivant, qui subsiste même si J est nul: *Si les formules de substitution sont différentiables en un point P_y et que leur jacobien soit J en ce point, elles font correspondre à un ensemble de points contenu dans un carré ω de côtés infiniment petits renfermant P_y, un ensemble dont la mesure extérieure est inférieure à*

$$\mid J \mid \omega + \epsilon\omega,$$

où ϵ tend vers 0 avec ω.

81. **Mesures d'ensembles qui se correspondent régulièrement.** Supposons que les formules de transformation

$$(1)\qquad x_1 = \phi(y_1, y_2), \qquad x_2 = \psi(y_1, y_2),$$

établissent une correspondance continue et uniforme dans les deux sens entre les points P_x et P_y de deux ensembles E_x et E_y, tous deux mesurables (B), et que, de plus, la correspondance soit régulière (B).

Soit e_y un ensemble variable dans le plan y, mais mesurable (B), et e_x l'ensemble mesurable (B) qui correspond, dans E_x, à l'ensemble $e_y E_y$. La mesure, me_x, de ce dernier est une fonction continue et à variation bornée de e_y. Donc, si cette fonction admet une dérivée sur un réseau, Λ, finie dans e_y, on aura

$$me_x = \int_{e_y} \Lambda dP_y.$$

82. **Transformation des intégrales doubles dans l'hypothèse de la mesurabilité au sens de Borel.** Nous avons d'abord le théorème suivant:

Si les formules de transformation:

$$x_1 = \phi(y_1, y_2), \qquad x_2 = \psi(y_1, y_2), \tag{1}$$

établissent une correspondance continue et uniforme dans les deux sens et de plus régulière (B), *entre les points* P_x *et* P_y *de deux ensembles mesurables* (B), E_x *et* E_y, *si, de plus,* $f(x_1, x_2)$ *est une fonction mesurable* (B) *finie et sommable sur* E_x; *si enfin la mesure de l'ensemble* e_x *qui correspond à* $e_y E_y$ *est une fonction de* e_y *(mes. B) admettant une dérivée finie* Λ *sur tout* E_y, *on aura*

$$\int_{E_2} f(x_1, x_2)\, dP_x = \int_{E_y} f(\phi, \psi)\, \Lambda dP_y.$$

En effet, si f est constant, ce théorème revient à celui qui vient d'être démontré. Si f ne prend qu'un nombre limité de valeurs différentes, la transformation est permise dans chaque partie de E_x où f est constant: elle subsiste dans tout E_x par l'addition des résultats. Si f est positif, on peut le considérer comme limite d'une suite non décroissante de fonctions ne prenant qu'un nombre limité de valeurs, et le théorème subsiste par un passage à la limite. Enfin, dans le cas général, f est la différence de deux fonctions non négatives, ce qui ramène au cas précédent.

Faisons maintenant une nouvelle hypothèse. Supposons que les formules de transformation (1) soient différentiables sur E_y dans tout E_y et soit J le jacobien de cette transformation. Je remarque d'abord que l'on aura

$$\Lambda \leqq |J|.$$

Considérons, en effet, un carré infiniment petit ω, faisant partie de la famille de mailles qui sert au calcul de la dérivée au point P_y. Les formules (1) font correspondre à l'ensemble ωE_y un ensemble de mesure $< |\omega| J + \epsilon\omega$, comme on l'a expliqué plus haut (N° 80). Donc la dérivée, qui est le quotient de cette mesure par ω, est $\leqq |J|$. Il s'ensuit, en particulier, que Λ est fini si les formules (1) sont différentiables. Nous pouvons maintenant établir le théorème suivant:

Si les formules de transformation (1) *établissant une correspondance continue, uniforme et régulière entre* E_x *et* E_y, *sont différentiables sur* E_y *dans tout* E_y, *si enfin* $f(x_1, x_2)$ *est mesurable* (B), *finie et sommable sur* E_x, $f \mid J \mid$ *sera mesurable* (B) *sur* E_y, *et l'on aura*

$$\int_{E_x} f(x_1, x_2)\, dP_x = \int_{E_y} f \mid J \mid dP_y .$$

Supposons f positif. Dans ce cas, Λ étant $\leqq J$, le théorème précédent fournit la relation

$$\int_{E_x} f dP_x \leqq \int_{E_y} f \mid J \mid dP_y .$$

Soient E_x' et E_y' les ensembles correspondants, tous deux mesurables (B), où J n'est pas nul, contenus respectivement dans E_x et dans E_y. Les y peuvent être considérées comme des fonctions différentiables des x dans E_x' de jacobien $1 : J$. Nous pouvons ainsi faire, dans E_y', la transformation inverse de la précédente, ce qui donne

$$\int_{E_y'} f \mid J \mid dP_y \leqq \int_{E_x'} f dP_x .$$

Mais l'intégrale dans E_y' est la même que dans E_y, car J s'annule dans $E_y - E_y'$. D'autre part, comme f est supposé positif et que E_x' est contenu dans E_x, il vient *a fortiori*

$$\int_{E_y} f \mid J \mid dP_y \leqq \int_{E_x} f dP_x .$$

Cette inégalité de sens contraire à la première entraîne l'égalité du théorème. La conclusion subsiste quel que soit le signe de f, car on peut toujours considérer f comme la différence de deux fonctions non négatives.

83. **Transformation des intégrales doubles dans le cas général.** *Si les formules de transformation* (1) *établissent une correspondance continue et uniforme dans les deux sens entre deux ensembles mesurables* E_x *et* E_y; *si, de plus, elles sont différentiables sur* E_y *dans tout* E_y; *si enfin* $f(x_1, x_2)$ *est finie et sommable sur* E_x, $f \mid J \mid$ *sera sommable sur* E_y, *et l'on aura*

$$\int_{E_x} f(x_1, x_2)\, dP_x = \int_{E_y} f \mid J \mid dP_y .$$

Nous pouvons admettre que E_x et E_y sont mesurables (B) et se correspondent régulièrement (B), car E_x et E_y renferment (No. 79) des ensembles de mêmes mesures satisfaisant à cette condition, et que l'on peut substituer à E_x et E_y sans altérer le sens des intégrales.

Supposons alors f borné et admettant les bornes a et A. Il est facile de construire deux fonctions f_1 et f_2 de x, mesurables (B), satisfaisant aux conditions $f_1 \leqq f \leqq f_2$ et admettant la même intégrale que f sur E_x. En effet, nous pouvons trouver dans E_x un ensemble E_x mesurable (B), de même mesure que E_x, où f est la dérivée de son intégrale indéfinie (donc mesurable B). Nous définirons f_1 comme égal à f dans E'_x et à a ailleurs, f_2 comme égal à f dans E'_x et à A ailleurs.

La formule de transformation est alors établie pour f_1 et pour f_2, en vertu du théorème précédent. Elle subsiste alors nécessairement pour la fonction intermédiaire f.

La démonstration s'étend alors à f fini et sommable par le même passage à la limite que dans la démonstration du théorème précédent.

En particulier, si $f = 1$, on a le théorème suivant:

Si les formules (1) *établissent une correspondance continue et uniforme dans les deux sens entre deux ensembles mesurables E_x et E_y; si elles sont, en outre, différentiables sur E_y dans tout E_y, on a*

$$mE_x = \int_{E_y} |J| \, dP_y.$$

On remarquera que, dans ce cas, à tout ensemble mesurable e_y dans E_y, correspond un e_x mesurable, dont la mesure s'exprime par la formule analogue à la précédente.

Remarque. Si f était sommable mais non fini, la formule de transformation subsisterait, à la condition de convenir que le produit fJ s'annulera partout avec J, même aux points où f serait infini. En effet, fJ est nul dans ce cas quand on le considère comme limite de $f_n J$ (f_n étant fini).