TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 347, Number 7, July 1995

SUR LES STRUCTURES DE CONTACT REGULIERES EN DIMENSION TROIS

AMINE HADJAR

ABSTRACT. Let $\mathscr{M}$ be a compact and oriented 3-manifold with boundary, endowed with a free $\mathbb{S}^1$ action. We give a characterization of germs of invariant contact structures along $\partial\mathscr{M}$ which are extendable to $\mathscr{M}$ as regular contact structures.

INTRODUCTION

L'étude des structures de contact invariantes sous l'action libre du groupe $\mathbb{S}^1$ sur une variété compacte, connexe et orientée $\mathscr{M}_{2p+1}$ a commencé dans le travail de Boothby-Wang [BW] ; les structures qu'ils ont examinées sont non seulement invariantes mais encore transverses aux orbites de l'action.

En dimension 3, *l'ensemble singulier* le long duquel une structure de contact $\mathbb{S}^1$-invariante est tangente à l'orbite caractérise entièrement la structure de contact à orientation près (R. Lutz [L2]). C'est une surface de $\mathscr{M}_3$, dont les composantes connexes sont des tores invariants. Si cet ensemble est vide, la structure de contact est régulière (au sens de Boothby-Wang).

Le problème du prolongement de germes de structures de contact $\mathbb{S}^1$-invariantes donnés le long du bord de $\mathscr{M}_3$ est très différent selon que l'on contrôle ou non la topologie de l'ensemble singulier. Dans [H1], on donne une réponse complète pour le second cas : on montre qu'un tel germe est toujours prolongeable en une structure de contact $\mathbb{S}^1$-invariante sur $\mathscr{M}_3$, pourvu qu'il soit d'orientation convenable.

La situation est complètement différente si l'on veut un prolongement où l'ensemble singulier est fixé, et plus particulièrement si l'on veut un prolongement en une structure de contact régulière.

Dans ce travail, on associe un invariant réel noté $\Im_{\mathscr{M}}(\sigma)$ à tout germe de structures de contact régulières σ donné le long de $\partial\mathscr{M}_3$, et on montre que : *Si σ est d'orientation positive (resp. négative), il existe une structure de contact régulière sur $\mathscr{M}_3$ qui prolonge σ, si et seulement si $\Im_{\mathscr{M}}(\sigma)$ est strictement positif (resp. < 0).*

Par ailleurs, on montre que, pour tout réel r donné, il existe un germe de structures de contact régulières le long de $\partial\mathscr{M}$, d'orientation arbitraire et dont

Received by the editors May 19, 1994.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53C15.
Je remercie Yakov Eliashberg et Robert Lutz pour l'attention qu'ils ont accordée à ce travail, ainsi que pour leurs remarques et suggestions qui ont été très précieuses.

©1995 American Mathematical Society

l'invariant réel associé vaut r. On a ainsi une infinité de germes de structures de contact régulières σ d'orientation positive (resp. négative) le long du bord, qui ne sont pas prolongeables sur $\mathscr{M}$ en structures de contact régulières sur $\mathscr{M}$ en entier ; leurs invariants réels $\Im_{\mathscr{M}}(\sigma)$ sont ≤ 0 (resp. ≥ 0).

Tous les objets différentiels dont il est question sont supposés C^∞.

1. Préliminaires

1.1. Une forme de contact sur une variété $\mathscr{X}$ de dimension trois est une forme de Pfaff ω telle que $\omega \wedge d\omega$ soit sans zéros. Une telle forme induit une orientation sur $\mathscr{X}$ définie par la forme volume $\omega \wedge d\omega$ et appelée l'orientation de ω. Une structure de contact est un champ de plans défini localement comme le noyau d'une forme de contact.

Dans cet article, toutes les structures de contact considérées sont supposées *transversalement orientables*, c'est-à-dire définies globalement par une forme de contact. On notera $[\omega]$ la structure de contact associée à une forme de contact ω.

1.2. Soit $\mathscr{N}$ une surface fermée, orientable et plongée dans $\mathscr{X}$. Une structure de contact σ induit un feuilletage (singulier) de codimension 1 sur $\mathscr{N}$, appelé *feuilletage caractéristique* de σ.

Il est facile de voir qu'un feuilletage (singulier) $\mathfrak{F}$ de codimension un sur $\mathscr{N}$ est le feuilletage caractéristique d'un germe de structures de contact le long de $\mathscr{N}$, si et seulement si $\mathfrak{F}$ est déterminé par une équation de Pfaff $\eta = 0$ où η est une 1-forme sur $\mathscr{N}$ ne s'annulant pas simultanément avec $d\eta$ (cf. [H2], [L3] et [H3]). De plus ce germe est unique à difféomorphismes près laissant fixes les points de $\mathscr{N}$ (cf. [AG], [H1] et [H2]).

2. Structures de contact régulières

2.1. Dans les parties 2, 3, 4 et 5 de cet article, on considère un fibré principal $\mathscr{M}(\mathscr{B}, \mathbb{S}^1, q)$ de groupe structural $\mathbb{S}^1$, de base $\mathscr{B}$ et de projection q, les variétés $\mathscr{M}$ (resp. $\mathscr{B}$) étant compactes, connexes, de dimension 3 (resp. 2), orientables et éventuellement à bord.

On note Z le champ de vecteurs associé à l'action de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathscr{M}$, et α une forme de connexion telle que $\alpha(Z) = 1$ et $Z \rfloor d\alpha = 0$. La forme de courbure vient de la base ; on pose $d\alpha = q^*\Omega$.

On oriente $\mathscr{M}$ arbitrairement, et $\mathscr{B}$ de manière telle que si v est une forme volume positive sur $\mathscr{B}$ la forme $\alpha \wedge q^*v$ soit positive sur $\mathscr{M}$.

2.2. Soit ω une forme de Pfaff $\mathbb{S}^1$-invariante sur $\mathscr{M}$. Elle est partout transverse aux orbites de l'action si et seulement si la fonction $\mathbb{S}^1$-invariante $\omega(Z)$ est sans zéros. Pour une telle forme, il existe une 1-forme β sur $\mathscr{B}$ pour laquelle $\omega/\omega(Z) = \alpha + q^*\beta$.

2.3. Une forme de contact ω sur $\mathscr{M}$ est dite *régulière* (au sens de Boothby-Wang [BW]), si elle est $\mathbb{S}^1$-invariante et partout transverse aux orbites de l'action. La structure de contact associée $[\omega]$ est dite également *régulière*.

D'après 2.2, $[\omega]$ peut être représentée par une forme de contact régulière de la forme $\alpha + q^*\beta$. La condition de contact s'exprime par $\Omega + d\beta > 0$ (resp. < 0) si l'orientation de $[\omega]$ est positive (resp. < 0).

2.4. On sait, d'après [L2], que

Théorème. (i) *Si les variétés* $\mathscr{M}$ *et* $\mathscr{B}$ *sont à bord, il existe une forme de contact régulière* ω *sur* $\mathscr{M}$ *d'orientation arbitraire.*

(ii) *Si* $\mathscr{M}$ *et* $\mathscr{B}$ *sont sans bord, alors il existe une forme de contact régulière* ω *sur* $\mathscr{M}$, *si et seulement si la classe caractéristique* $[\Omega]$ *du fibré est non nulle.*

Dans (ii), l'orientation de ω est positive (resp. < 0) si $\int_{\mathscr{B}}[\Omega] > 0$ (resp. < 0). Il est donc impossible d'avoir, sur un tel fibré, deux formes de contact régulières d'orientations opposées.

Remarque. Dans ce dernier cas, deux formes de contact régulières sur $\mathscr{M}$ sont conjuguées pai un difféomorphisme équivariant et isotope à l'identité.

2.5. Soit $\mathscr{N}$ une surface $\mathbb{S}^1$-invariante fermée et plongée dans $\mathscr{M}$. Le feuilletage caractéristique (sur $\mathscr{N}$) d'une structure de contact régulière définie au voisinage de $\mathscr{N}$ est un feuilletage de codimension un, $\mathbb{S}^1$-invariant et partout transverse aux orbites de l'action de $\mathbb{S}^1$. Inversement, étant donné un feuilletage $\mathfrak{F}$ sur $\mathscr{N}$ vérifiant les propriétés ci-dessus, il est facile de construire un germe de structures de contact régulières d'orientation arbitraire le long de $\mathscr{N}$ ayant $\mathfrak{F}$ comme feuilletage caractéristique (cf. [H1]).

3. Un invariant réel associé à un germe de structures de contact régulières le long du bord

On suppose que les variétés $\mathscr{M}$ et $\mathscr{B}$ sont à bord. Les composantes connexes de $\partial\mathscr{M}$ sont des tores invariants qui se projettent sur le bord de $\mathscr{B}$.

3.1. Définition-notation. Soit σ un germe de structures de contact régulières le long de $\partial\mathscr{M}$. Il existe un unique germe de 1-formes β le long de $\partial\mathscr{B}$ pour lequel $\sigma = [\alpha + q^*\beta]$. Notons $\mathfrak{I}_{\mathscr{M}}(\sigma)$ le réel défini par

$$\mathfrak{I}_{\mathscr{M}}(\sigma) = \int_{\mathscr{B}} \Omega + \int_{\partial\mathscr{B}} \beta$$

$\partial\mathscr{B}$ désignant le bord orienté de $\mathscr{B}$.

C'est un invariant par isomorphismes du fibré qui préservent l'orientation. Si σ' est un germe de structures de contact régulières le long de $\partial\mathscr{M}$, ayant le même feuilletage caractéristique que σ, alors $\mathfrak{I}_{\mathscr{M}}(\sigma) = \mathfrak{I}_{\mathscr{M}}(\sigma')$.

3.2. Proposition. *L'invariant réel* $\mathfrak{I}_{\mathscr{M}}(\sigma)$ *ne dépend pas du choix de la forme de connexion* α.

Preuve. Soient α_1 et α_2 deux formes de connexion sur $\mathscr{M}(\mathscr{B}, \mathbb{S}^1, q)$, i.e., telles que $\alpha_i(Z) = 1$ et $Z \rfloor d\alpha_i = 0$ pour $i = 1, 2$. Les formes de courbures respectives viennent de la base ; on pose $d\alpha_i = q^*\Omega_i$. Si ω est une forme de contact régulière au voisinage de $\partial\mathscr{M}$, il existe deux 1-formes β_1 et β_2 au voisinage de $\partial\mathscr{B}$ telles que $\omega/\omega(Z) = \alpha_1 + q^*\beta_1 = \alpha_2 + q^*\beta_2$ (d'après 2.2). La forme invariante $\alpha_1 - \alpha_2$ est horizontale ; il existe donc une 1-forme η sur $\mathscr{B}$ telle que $\alpha_1 - \alpha_2 = q^*\eta$. On a évidemment $\Omega_1 - \Omega_2 = d\eta$ sur $\mathscr{B}$ et $\eta = \beta_2 - \beta_1$ au voisinage de $\partial\mathscr{B}$. D'après la formule de Stokes,

$$\int_{\mathscr{B}} d\eta = \int_{\partial\mathscr{B}} \eta = \int_{\partial\mathscr{B}} (\beta_2 - \beta_1),$$

or

$$\int_{\mathscr{B}} d\eta = \int_{\mathscr{B}} (\Omega_1 - \Omega_2),$$

d'où

$$\int_{\mathscr{B}} \Omega_1 + \int_{\partial\mathscr{B}} \beta_1 = \int_{\mathscr{B}} \Omega_2 + \int_{\partial\mathscr{B}} \beta_2. \quad \square$$

3.3. Proposition. *Pour tout réel r, il existe un germe de structures de contact régulières σ d'orientation arbitraire le long de $\partial\mathscr{M}$, pour lequel $\Im_{\mathscr{M}}(\sigma) = r$.*

Preuve. Soit ζ une 1-forme au voisinage de $\partial\mathscr{B}$ telle que $\int_{\partial\mathscr{B}} \zeta = r - \int_{\mathscr{B}} \Omega$. Le champ de plans $\alpha + q^*\zeta = 0$ induit un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension 1 sur $\partial\mathscr{M}$, $\mathbb{S}^1$-invariant et partout transverse aux orbites de l'action. Soit σ un germe de structures de contact régulières le long du bord dont le feuilletage caractéristique est $\mathfrak{F}$ (voir 2.5). Alors on a $\Im_{\mathscr{M}}(\sigma) = r$. $\square$

3.4. *Remarque.* L'invariant réel $\Im_{\mathscr{M}}(\sigma)$ dépend bien sûr du feuilletage caractéristique de σ sur le bord (d'après la définition 3.1), mais aussi du fibré $\mathscr{M}(\mathscr{B}, \mathbb{S}^1, q)$. L'influence de la fibration se voit bien dans l'exemple suivant.

Supposons la variété $\mathscr{M}$ sans bord et soient $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ deux sous variétés de dimensions 3 de $\mathscr{M}$, à bord, $\mathbb{S}^1$-invariantes, telles que $\mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_2 = \mathscr{M}$ et $\partial\mathscr{M}_1 = \partial\mathscr{M}_2$. On a donc deux fibrés principaux à bord $\mathscr{M}_1(\mathscr{B}_1, \mathbb{S}^1, q_{|\mathscr{M}_1})$ et $\mathscr{M}_2(\mathscr{B}_2, \mathbb{S}^1, q_{|\mathscr{M}_2})$ de base respectives $\mathscr{B}_1 = q(\mathscr{M}_1)$ et $\mathscr{B}_2 = q(\mathscr{M}_2)$. Si σ est un germe de structures de contact régulières le long du bord commun, on lui associera les 2 réels $\Im_{\mathscr{M}_1}(\sigma)$ et $\Im_{\mathscr{M}_2}(\sigma)$ qui sont différents à priori.

En effet, remarquons d'abord que

$$\Im_{\mathscr{M}_1}(\sigma) + \Im_{\mathscr{M}_2}(\sigma) = \int_{\mathscr{B}} [\Omega]$$

qui ne dépend pas de σ, $[\Omega]$ étant la classe caractéristique du fibré $\mathscr{M}(\mathscr{B}, \mathbb{S}^1, q)$. Ainsi $\Im_{\mathscr{M}_1}(\sigma) = \Im_{\mathscr{M}_2}(\sigma)$ équivaut à

$$\Im_{\mathscr{M}_1}(\sigma) = \Im_{\mathscr{M}_2}(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\mathscr{B}} [\Omega].$$

Maintenant, on choisit σ de manière à avoir $\Im_{\mathscr{M}_1}(\sigma) \neq \frac{1}{2} \int_{\mathscr{B}} [\Omega]$ (voir 3.3). On aura donc $\Im_{\mathscr{M}_1}(\sigma) \neq \Im_{\mathscr{M}_2}(\sigma)$.

4. Théorèmes de prolongement

On reprend les hypothèses du §2.1. Dans tout ce qui suit, lorsque la variété $\mathscr{M}$ est sans bord, $\partial\mathscr{M}$ désigne tout simplement l'ensemble vide. Soit $\mathscr{S}$ une surface plongée dans $\mathscr{M}$, fermée et $\mathbb{S}^1$-invariante. Ses composantes connexes sont des tores invariants de $\mathscr{M}$. Chacune est supposée incluse soit dans $\partial\mathscr{M}$ soit dans $\mathscr{M} \setminus \partial\mathscr{M}$.

On se propose de répondre à la question suivante : *Etant donné un germe de structures de contact régulières le long de $\mathscr{S}$, sous quelles conditions est-il prolongeable sur $\mathscr{M}$ en une structure de contact régulière* ?

Pour commodité de lecture, on traitera ce problème d'abord dans un cas particulier et intéressant, celui où $\mathscr{S} = \partial\mathscr{M}$. Ensuite on traitera le cas général, en se ramenant au cas précédent.

4.1. *Le cas $\mathscr{S} = \partial\mathscr{M}$.*

Si $\partial\mathscr{M}$ est vide ($\mathscr{S}$ aussi), une réponse est donnée dans le théorème 2.4. Maintenant si $\mathscr{M}$ est à bord, on montre que :

4.1.1. Théorème. *Soit* σ_0 *un germe de structures de contact régulières le long de* $\partial\mathscr{M}$ *. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une structure de contact régulière d'orientation positive* (*resp. négative*) *sur* $\mathscr{M}$ *, qui prolonge le germe* σ_0 *.*

(ii) *L'orientation de* σ_0 *est positive* (*resp. négative*) *et* $\Im_{\mathscr{M}}(\sigma_0) > 0$ (*resp.* < 0).

4.1.2. *Première partie de la démonstration.*

Soit σ une structure de contact régulière d'orientation positive sur $\mathscr{M}$. D'après 2.3, elle s'écrit $\sigma = [\alpha + q^*\beta]$ où β est une 1-forme sur $\mathscr{B}$ telle que $\Omega + d\beta$ soit une forme volume positive sur $\mathscr{B}$. Si σ prolonge σ_0 , alors $\Im_{\mathscr{M}}(\sigma_0) = \int_{\mathscr{B}}(\Omega + d\beta)$, d'où (ii). Pour la réciproque (deuxième partie, §4.1.4), on a besoin de prolonger le germe le long de $\partial\mathscr{B}$ d'une 1-forme β_0 vérifiant $\Omega + d\beta_0 > 0$ (par rapport à l'orientation de $\mathscr{B}$) en une 1-forme β sur toute la surface $\mathscr{B}$, tout en respectant la condition $\Omega + d\beta > 0$. Cette possibilité résulte du lemme ci-dessous.

4.1.3. Lemme ([L1]). *Soit* ν *une 2-forme sur* $\mathscr{B}$ *. Soit* ξ *un germe de primitive* ($d\xi = \nu$) *le long de* $\partial\mathscr{B}$ *, tel que* $\int_{\partial\mathscr{B}}\xi = \int_{\mathscr{B}}\nu$ *. Alors il existe une 1-forme* $\tilde{\xi}$ *sur* $\mathscr{B}$ *telle que :*

(i) $\tilde{\xi} = \xi$ *au voisinage de* $\partial\mathscr{B}$ *,*

(ii) $d\tilde{\xi} = \nu$ *sur* $\mathscr{B}$ *.*

Preuve. Notons $\partial\mathscr{B} = \bigcup_i \mathscr{C}_i$ où les $\mathscr{C}_i$ sont des cercles. Comme $H^2(\mathscr{B}, \mathbb{R}) = 0$, ν admet une primitive ξ_0 sur $\mathscr{B}$ telle que $\int_{\mathscr{C}_i}\xi_0 = \int_{\mathscr{C}_i}\xi$ pour tout i (théorème de de Rham relatif). Au voisinage de $\partial\mathscr{B}$, on a donc $d(\xi - \xi_0) = 0$. Comme $\int_{\mathscr{C}_i}(\xi - \xi_0) = 0$, la forme fermée $\xi - \xi_0$ est exacte au voisinage de chaque $\mathscr{C}_i$; posons au voisinage de $\mathscr{C}_i$, $\xi - \xi_0 = df_i$ où les f_i sont des fonctions. Soit f une fonction sur $\mathscr{B}$ telle que $f = f_i$ au voisinage de $\mathscr{C}_i$. La forme $\tilde{\xi} = \xi_0 + df$ vérifie la conclusion du lemme.

4.1.4. *Deuxième partie de la démonstration du théorème* 4.1.1.

Soit $\sigma_0 = [\alpha + q^*\beta_0]$ une structure de contact régulière au voisinage de $\partial\mathscr{M}$, d'orientation positive et telle que $\Im_{\mathscr{M}}(\sigma_0) > 0$. La condition de contact sur σ_0 implique que $\Omega + d\beta_0 > 0$ au voisinage de $\partial\mathscr{B}$. Soit Ω_0 une forme volume positive sur $\mathscr{B}$ telle que $\Omega_0 = \Omega + d\beta_0$ au voisinage de $\partial\mathscr{B}$ et $\int_{\mathscr{B}}\Omega_0 = \Im_{\mathscr{M}}(\sigma_0)$. La forme $\xi = \Omega_0 - \Omega$ admet β_0 comme primitive au voisinage de $\partial\mathscr{B}$, et vérifie $\int_{\mathscr{B}}\xi = \int_{\partial\mathscr{B}}\beta_0$. D'après le lemme 4.1.3, il existe une 1-forme β sur $\mathscr{B}$ telle que $\xi = d\beta$ sur $\mathscr{B}$ et $\beta = \beta_0$ au voisinage de $\partial\mathscr{B}$. Ainsi on a $\Omega_0 = \Omega + d\beta$ qui est une forme volume positive sur $\mathscr{B}$. Ce qui veut dire que la forme $\alpha + q^*\beta$ est de contact sur $\mathscr{M}$. Sa structure de contact associée est régulière et prolonge bien le germe de σ_0 . Le cas où σ_0 est d'orientation négative se déduit du cas précédent en inversant les orientations de $\mathscr{M}$ et $\mathscr{B}$. □

4.2. *Le cas général.*

4.2.1. Notons $\mathscr{M}_i$ les adhérences des composantes connexes de $\mathscr{M} \setminus \mathscr{S}$ vérifiant $\partial\mathscr{M}_i \subseteq \mathscr{S}$, et $\mathscr{M}'_j$ celles des autres composantes. Il est possible que l'une ou l'autre de ces familles finies soit vide. Posons $\mathscr{B}_i = q(\mathscr{M}_i)$. Les $\mathscr{M}'_j$ sont des sous-variétés à bord, compactes, de dimension 3 de $\mathscr{M}$. Il en est de même pour les $\mathscr{M}_i$, sauf si $\partial\mathscr{M}$ est vide et $\mathscr{M} \setminus \mathscr{S}$ est connexe auquel cas $\mathscr{M}_i = \mathscr{M}$.

4.2.2. Soit $\sigma = [\alpha + q^*\beta]$ un germe de structures de contact régulières le long de $\mathscr{S}$. On notera tout simplement $\Im_{\mathscr{M}_i}(\sigma)$ le réel $\Im_{\mathscr{M}_i}(\sigma_{|\partial\mathscr{M}_i})$.

Pour le cas où $\mathscr{M}_i$ est sans bord, on a que $\Im_{\mathscr{M}_i}(\sigma) = \Im_{\mathscr{M}}(\sigma) = \int_{\mathscr{B}}[\Omega]$ qui ne dépend pas de σ.

4.2.3. *Remarque.* Si $\partial\mathscr{M}$ est vide, on montre que

$$\sum_i \Im_{\mathscr{M}_i}(\sigma) = \int_{\mathscr{B}} [\Omega].$$

4.2.4. Voici une généralisation du théorème 4.1.1 :

Théorème. *Soit σ un germe de structures de contact régulières le long de $\mathscr{S}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une structure de contact régulière d'orientation positive* (*resp. négative*) *sur $\mathscr{M}$, qui prolonge σ.*

(ii) *L'orientation de σ est positive* (*resp. négative*) *et $\Im_{\mathscr{M}_i}(\sigma) > 0$* (*resp.* < 0) *pour tout i.*

Lorsqu'il n'y a aucune composante $\mathscr{M}_i$, ce théorème reste bien entendu vrai en supprimant évidemment la condition "$\Im_{\mathscr{M}_i}(\sigma) > 0$ (resp. < 0) pour tout i".

Démonstration. Soit $[\omega] = [\alpha + q^*\beta]$ une structure de contact régulière sur $\mathscr{M}$, d'orientation positive (resp. négative), qui prolonge σ. La condition $\omega \wedge d\omega > 0$ (resp. < 0) équivaut à $\Omega + d\beta > 0$ (resp. < 0) sur $\mathscr{B}$; d'où, en intégrant sur chaque $\mathscr{B}_i$, $\Im_{\mathscr{M}_i}(\sigma) > 0$ (resp. < 0).

Soit $\sigma = [\alpha + q^*\beta_0]$ une structure de contact régulière, d'orientation positive au voisinage de $\mathscr{S}$, telle que $\Im_{\mathscr{M}_i}(\sigma) > 0$ pour tout i. Si $\partial\mathscr{M}$ n'est pas contenu dans $\mathscr{S}$, on prolonge σ au voisinage de la surface $\mathscr{S}' = \mathscr{S} \cup \partial\mathscr{M}$ en une structure de contact régulière σ' telle que les $\Im_{\mathscr{M}'_j}(\sigma')$ soient également > 0 (resp. < 0).

On est donc ramené au cas où $\partial\mathscr{M} \subseteq \mathscr{S}$. On suppose donc qu'il n'existe pas de composantes $\mathscr{M}'_j$. Soit V un voisinage tubulaire de $q(\mathscr{S})$ tel que β_0 reste définie au voisinage de $\bar{V}$. Pour chaque i, appelons $\tilde{\mathscr{B}}_i$ la composante connexe de $\mathscr{B} \setminus V$ contenue dans $\mathscr{B}_i$; c'est une sous-variétés à bord de $\mathscr{B}$, compacte et de dimension 2. Posons $\tilde{\mathscr{M}}_i = q^{-1}(\tilde{\mathscr{B}}_i)$. En choisissant V assez petit, on a $\Im_{\tilde{\mathscr{M}}_i}(\sigma) > 0$ pour tout i, compte tenu de la propriété (ii). D'après le théorème 4.1.1, il existe pour tout i une structure de contact régulière σ_i sur $\tilde{\mathscr{M}}_i$ qui prolonge le germe de σ le long de $\partial\tilde{\mathscr{M}}_i$. La structure de contact recherchée sera donc $[\omega] = \sigma$ au dessus de V et $[\omega] = \sigma_i$ sur chaque $\tilde{\mathscr{M}}_i$. Si σ est d'orientation négative, on conclue en inversant les orientation de $\mathscr{M}$ et $\mathscr{B}$. □

5. Classification équivariante

Reprenons les hypothèses et notations des paragraphes 2.1 et 4. Si $\partial\mathscr{M}$ est non vide, on le supposera contenu dans $\mathscr{S}$.

Proposition. *Soient ω et ω' deux formes de contact régulières sur $\mathscr{M}$, de même orientation et induisant le même feuilletage caractéristique sur $\mathscr{S}$. Alors il existe un difféomorphisme h équivariant, isotope à l'identité, qui fixe les points de $\mathscr{S}$ et tel que $h^*\omega \wedge \omega' = 0$.*

Preuve. D'après [H1], il existe un germe de difféomorphismes équivariant le long de $\mathscr{S}$, qui fixe les points de $\mathscr{S}$ et qui conjugue ω et ω' au voisinage de $\mathscr{S}$. On prolonge ce germe en un difféomorphisme ϕ équivariant et isotope à l'identité ; on a $\phi^*\omega \wedge \omega' = 0$ au voisinage de $\mathscr{S}$.

On est maintenant ramené au cas où ω et ω' coïncident au voisinage de $\mathscr{S}$. Les formes de contact $\omega/\omega(Z)$ et $\omega'/\omega'(Z)$ sont des formes de connexion de courbures respectives $q^*\Omega$ et $q^*\Omega'$, où Ω et Ω' sont des formes volume sur $\mathscr{B}$ vu la condition de contact. Les formes Ω et Ω' sont de même signe. Il en résulte par convexité que $t\Omega + (1-t)\Omega'$ est sans zéros, ce qui montre que les formes

$$\xi_t = t\omega/\omega(Z) + (1-t)\omega'/\omega'(Z)$$

sont de contact.

Soit Z_t le champ de vecteurs invariant défini par les conditions

$$\xi_t(Z_t) = 0 \quad \text{et} \quad (Z_t \rfloor d\xi_t - \dot{\xi}_t) \wedge \xi_t = 0.$$

Au voisinage de $\mathscr{S}$, comme $\dot{\xi}_t = 0$, $Z_t = 0$ vu la condition de contact sur ξ_t. En intégrant le champ Z_t qui est complet, on obtient une isotopie de difféomorphismes équivariants h_t telle que

$$h_0 = \text{id.} \quad \text{et} \quad h_t^*\xi_0 \wedge \xi_t = 0.$$

La condition $Z_{t|\mathscr{S}} = 0$ implique que h_t fixe les points de $\mathscr{S}$. □

Remarques. Ceci montre que la construction dans 4.2.4, pour le cas $\partial\mathscr{M} \subseteq \mathscr{S}$, donne à isomorphie près qui laisse fixes les points de $\mathscr{S}$, l'unique structure de contact régulière sur $\mathscr{M}$, qui prolonge le germe de structure de contact régulières donné le long de $\mathscr{S}$. Si $\partial\mathscr{M}$ est non contenu dans $\mathscr{S}$, un tel difféomorphime h n'existe pas toujours. Celui-ci devrait conserver $\partial\mathscr{M} \setminus \mathscr{S}$, et par conséquent $h_{|\partial\mathscr{M} \setminus \mathscr{S}}$ échangerait les feuilletages caractéristiques de ω et ω' sur $\partial\mathscr{M} \setminus \mathscr{S}$ qui ne sont pas difféomorphes à priori.

References

[AG] V. I. Arnold and A. B. Givental, *Symplectic geometry*, Itogi Nauk i Tekhn. Viniti **4** (1985), 5–139.

[BW] W. M. Boothby and H. C. Wang, *On contact manifolds*, Ann. of Math. **68** (1958), 721–734.

[H1] A. Hadjar, *Sur un problème d'existence relatif de formes de contact invariantes en dimension trois*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), 891–904.

[H2] ——, *Sur les plongements des surfaces fermées dans les variétés de contact de dimension trois*, Thèse de Magister, Oran, 1990.

[H3] ——, *Sur les structures de contact invariantes en dimension trois*, Thèse de Doctorat, Mulhouse, 1992.

[L1] R. Lutz, *Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension trois*, Thèse, Strasbourg, 1971.

[L2] ——, *Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension trois*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **27** (1977), 1–15.

[L3] ——, *Quelques remarques historiques et prospectives sur la géométrie de contact*, Rend. Sem. Facoltà Sci. Univ. Cagliari Suppl. **58** (1988), 361–393.

Université de Haute Alsace, 4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse Cedex, France
E-mail address: `hadjar@univ-mulhouse.fr`