TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 348, Number 11, November 1996

ERRATUM À "DUALITÉ DANS LE GROUPE DE GROTHENDIECK DE LA CATÉGORIE DES REPRÉSENTATIONS LISSES DE LONGUEUR FINIE D'UN GROUPE RÉDUCTIF p-ADIQUE"

ANNE-MARIE AUBERT

Je remercie Guy Henniart et Marie-France Vignéras pour m'avoir signalé que la preuve de la proposition 3.2 de [A] est inexacte (je ne sais pas si cette proposition est vraie). La preuve dans [A] du théorème suivant ([A, th. 3.6]) utilise cette proposition et le but de cet erratum est de fournir une preuve différente de ce théorème. La démonstration présentée ici m'a été suggérée par Jean-Loup Waldspurger et je l'en remercie grandement.

Les notations non définies sont celles de [A]. Soit $I \subset S$. Nous désignons par $\mathrm{Alg}(\{I\})$ la sous-catégorie abélienne de la catégorie des représentations lisses de G constituée par les représentations de G dont tout sous-quotient irréductible est sous-quotient d'une représentation induite $\mathbf{i}_{L_{v(I)}}^{G}(\mathrm{Ad}(v)(\sigma))$, où σ est une représentation irréductible cuspidale du sous-groupe de Levi standard L_I de G et $v \in W$ est tel que $v(I) \subset S \cap \Phi^+$ (autrement dit, L_I et $L_{v(I)} = vL_Iv^{-1}$ sont des sous-groupes de Levi standard associés de G, et $\mathrm{Alg}(\{I\})$ ne dépend que la classe d'association de L_I).

Théorème. *Pour tout E dans $\mathrm{Alg}(\{I\})$, la suite*

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow E \xrightarrow{d_{|S|}} \bigoplus_{|J|=|S|-1} \widetilde{E}_J \xrightarrow{d_{|S|-1}} \bigoplus_{|J|=|S|-2} \widetilde{E}_J \xrightarrow{d_{|S|-2}} \dots \xrightarrow{d_{|I|}} \bigoplus_{|J|=|I|} \widetilde{E}_J$$

est exacte.

Démonstration. Par définition de la catégorie $\mathrm{Alg}(\{I\})$, l'exactitude de la suite $(*)$ est équivalente à celle, pour tout I dans $\{I\}$, de la suite

$$0 \longrightarrow E_{U_I} \xrightarrow{d_{|S|,I}} \bigoplus_{|J|=|S|-1} \widetilde{E}_{J,I} \xrightarrow{d_{|S|-1,I}} \bigoplus_{|J|=|S|-2} \widetilde{E}_{J,I} \xrightarrow{d_{|S|-2,I}} \dots \xrightarrow{d_{|I|,I}} \bigoplus_{|J|=|I|} \widetilde{E}_{J,I},$$

où $\widetilde{E}_{J,I} = \mathbf{r}_{L_I}^{G}(\widetilde{E}_J)$.

Soit $I \in \{I\}$ fixé. Pour $J \subset S$, le terme $\widetilde{E}_{J,I}$ est filtré de la manière suivante. Notons Θ l'ensemble des parties θ de W telles que, si $w \in \theta$ et $l(w) < l(w')$, alors $w' \in \theta$. Soit $\Theta_J \subset \Theta$ l'ensemble des $\theta \in \Theta$ qui sont stables par multiplication à gauche par W_J. Pour tout $\theta \in \Theta_J$, nous posons $G_\theta := \bigcup_{w\in\theta} BwP_I$ et nous notons $\widetilde{E}_J^{\theta}$ le sous-module de $\widetilde{E}_J$ formé des éléments de $\widetilde{E}_J$ à support compact contenu

Received by the editors April 11, 1996.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 20G40, 22E50.

dans G_θ. Pour θ élément quelconque de Θ, nous posons $\widetilde{E}_J^\theta := \widetilde{E}_J^{\theta'}$, où θ' est le plus grand élément de Θ_J contenu dans θ.

Si $\theta_1 \in \Theta$ et $\theta_2 \in \Theta$ sont telles que $\theta_1 \subset \theta_2$, on a $\widetilde{E}_J^{\theta_1} \subset \widetilde{E}_J^{\theta_2}$. Pour $f \in \widetilde{E}_J^{\theta_2}$, nous notons $\mathrm{Res}^{\theta_2}_{\theta_2-\theta_1}(f)$ la restriction de f à $G_{\theta_2-\theta_1}$. La suite

$$0 \longrightarrow \widetilde{E}_J^{\theta_1} \longrightarrow \widetilde{E}_J^{\theta_2} \xrightarrow{\mathrm{Res}^{\theta_2}_{\theta_2-\theta_1}} \widetilde{E}_J^{\theta_2-\theta_1} \longrightarrow 0$$

est exacte (voir par exemple [C, lem. 6.1.1.]); l'application $\mathrm{Res}^{\theta_2}_{\theta_2-\theta_1}$ de $\widetilde{E}_J^{\theta_2}/\widetilde{E}_J^{\theta_1}$ dans $\widetilde{E}_J^{\theta_2-\theta_1}$, définie par $\mathrm{Res}^{\theta_2}_{\theta_2-\theta_1}(f+\widetilde{E}_J^{\theta_1}) := \mathrm{Res}^{\theta_2}_{\theta_2-\theta_1}(f)$ pour $f \in \widetilde{E}_J^{\theta_2}$, est donc un isomorphisme.

Si $\theta_1 \subset \theta_2$ et $\theta_1' \subset \theta_2'$ (éléments de Θ_J) vérifient $\theta_1 \subset \theta_1'$ et $\theta_2 \subset \theta_2'$ avec $\theta_2 - \theta_1 = \theta_2' - \theta_1'$, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{E}_J^{\theta_2}/\widetilde{E}_J^{\theta_1} \arrow[r, "\mathrm{Res}^{\theta_2}_{\theta_2-\theta_1}"] \arrow[d, "j"'] & \widetilde{E}_J^{\theta_2-\theta_1} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
\widetilde{E}_J^{\theta_2'}/\widetilde{E}_J^{\theta_1'} \arrow[r, "\mathrm{Res}^{\theta_2'}_{\theta_2'-\theta_1'}"'] & \widetilde{E}_J^{\theta_2'-\theta_1'}
\end{tikzcd},$$

où $j(f+\widetilde{E}_J^{\theta_1}) := f + \widetilde{E}_J^{\theta_1'}$, pour $f \in \widetilde{E}_J^{\theta_2}$

S'il existe $w \in W$ de longueur minimale dans la double classe W_JwW_I tel que $\theta_2 - \theta_1 = W_Jw$, on a $BW_JwP_I = P_JwP_I$ et l'application de $(\mathbf{i}_{L_J}^{P_JwP_I} \circ \mathbf{r}_{L_J}^G)(E)$ dans $(\mathbf{i}^{P_I}_{w^{-1}P_Jw\cap P_I} \circ \mathrm{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}^G_{L_J})(E)$ définie par $f \mapsto \Phi_f$ avec $\Phi_f(p) = f(wp)$ pour $p \in P_I$ est un isomorphisme ($\mathbf{i}$ désigne ici le foncteur induction à support compact normalisé).

Le groupe $w^{-1}P_Jw \cap L_I$ est le sous-groupe parabolique standard de L_I associé à $w^{-1}(J)\cap I$, il a comme radical unipotent $w^{-1}U_Jw \cap L_I$ et comme sous-groupe de Levi $w^{-1}L_Jw\cap L_I$. Notons alors $\xi \mapsto \overline{\xi}$ l'application canonique de $E_{U_J} = \mathbf{r}^G_{L_J}(E)$ sur $(E_{U_J})_{U_J\cap wU_Iw^{-1}} = \mathbf{r}^{L_J}_{wL_Iw^{-1}\cap L_J}(E_{U_J})$. D'après [C, prop. 6.2.1 et 6.3.3] l'application de $\big((\mathbf{i}^{P_I}_{w^{-1}P_Jw\cap P_I} \circ \mathrm{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}^G_{L_J})(E)\big)_{U_I}$ dans

$$\big(\mathbf{i}^{L_I}_{L_I\cap w^{-1}L_Jw} \circ \mathrm{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}^{L_J}_{wL_Iw^{-1}\cap L_J}\big)\big(\mathbf{r}^G_{L_J}(E)\big)$$

qui à Φ_f associe

$$l \mapsto \int_{U_I\cap w^{-1}P_Jw\backslash U_I} \overline{\Phi_f(ul)}\,\mathrm{d}\,\mu(u)$$

est un isomorphisme. Mais, le terme $\big(\mathbf{i}^{L_I}_{L_I\cap w^{-1}L_Jw} \circ \mathrm{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}^{L_J}_{wL_Iw^{-1}\cap L_J}\big)\big(\mathbf{r}^G_{L_J}(E)\big)$ est égal à $\big(\mathbf{i}^{L_I}_{L_I\cap w^{-1}L_Jw} \circ \mathrm{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}^{G}_{wL_Iw^{-1}\cap L_J}\big)(E)$, par transivité du foncteur $\mathbf{r}^G_{L_J}$ (voir par exemple [BZ, prop. 2.3 (c)]); comme E est dans la catégorie $\mathrm{Alg}(\{I\})$, si $\mathbf{r}^G_{wL_Iw^{-1}\cap L_J}(E)$ est non nul, il existe $v \in W$ tel que $wL_Iw^{-1}\cap L_J = vL_Iv^{-1}$, le groupe vL_Iv^{-1} est alors contenu dans (et par conséquent lui est égal) wL_Iw^{-1}, il s'ensuit que wL_Iw^{-1} est alors contenu L_J et l'on a alors

$$\big(\mathbf{i}^{L_I}_{L_I\cap w^{-1}L_Jw} \circ \mathrm{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}^{G}_{wL_Iw^{-1}\cap L_J}\big)(E) = \big(\mathrm{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}^G_{wL_Iw^{-1}}\big)(E).$$

Pour θ élément de Θ, nous notons $\widetilde{E}_{J,I}$ l'image dans $\widetilde{E}_{J,I}$ de $\widetilde{E}_J^\theta$. Si $\theta_1 \subset \theta_2$, par exactitude du foncteur de Jacquet $\mathbf{r}^G_{L_I}$, on a $\widetilde{E}^{\theta_2}_{J,I}/\widetilde{E}^{\theta_1}_{J,I} = \widetilde{E}^{\theta_2-\theta_1}_{J,I}$. Ce qui précède montre que, s'il existe $w \in W$ de longueur minimale dans la double classe $W_J w W_I$ tel que $\theta_2 - \theta_1 = W_J w$, et si $\widetilde{E}^{\theta_2}_{J,I}/\widetilde{E}^{\theta_1}_{J,I}$ est non nul, on a $wL_Iw^{-1} \subset L_J$ et l'application

$$f \mapsto \Big(l \mapsto \int_{U_I \cap w^{-1}P_J w \backslash U_I} \overline{f(wul)} d\mu(u)\Big)$$

définit un isomorphisme de $\big((\mathbf{i}^{G_{W_J w}}_{L_J} \circ \mathbf{r}^G_{L_J})(E)\big)_{U_I}$ sur $\big(\mathrm{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}^G_{wL_Iw^{-1}}\big)(E)$.

Rappelons que, pour $K \subset J$, on note π^J_K la surjection canonique de E_{U_J} sur $E_{U_K} = E_{U_J}/E_{U_J}(U_K \cap L_J)$ et φ^J_K l'application de E_J dans E_K qui à f associe $g \mapsto \pi^J_K(f(g))$. Les applications de transition d_{k,U_I} étant des sommes avec signes d'applications φ^J_K, elles respectent la filtration par Θ, *i.e.*, pour tout $\theta \in \Theta$ et tout $k \in \{1, \dots, |S|\}$, on a

$$d_{k,U_I}\big(\bigoplus_{|J|=k} \widetilde{E}^\theta_{J,I}\big) \subset \bigoplus_{|J|=k-1} \widetilde{E}^\theta_{J,I}.$$

Choisissons une suite $\theta_1 \supset \theta_2 \supset \cdots \supset \theta_{t+1}$d'éléments de Θ, telle que $\theta_1 = W$, $\theta_{t+1} = \emptyset$ et $\theta_i - \theta_{i+1} = w_i$ avec $w_i \in W$. Il suffit donc de prouver que, pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, la suite des gradués

$$0 \longrightarrow E^{\theta_i}_{U_I}/E^{\theta_{i+1}}_{U_I} \xrightarrow{d^{\theta_i}_{|S|,I}} \bigoplus_{|J|=|S|-1} \widetilde{E}^{\theta_i}_{J,I}/\widetilde{E}^{\theta_{i+1}}_{J,I} \xrightarrow{d^{\theta_i}_{|S|-1,I}} \dots \xrightarrow{d^{\theta_i}_{|I|,I}} \bigoplus_{|J|=|I|} \widetilde{E}^{\theta_i}_{J,I}/\widetilde{E}^{\theta_{i+1}}_{J,I}$$

est exacte. Fixons i et posons $w := w_i$. Notons θ'_i (resp. θ'_{i+1}) le plus grand élément de Θ_J qui est contenu dans θ_i (resp. θ_{i+1}). Supposons $\widetilde{E}^{\theta_i}_{J,I}/\widetilde{E}^{\theta_{i+1}}_{J,I}$ est non nul. Alors θ'_i et θ'_{i+1} sont distincts et la classe à gauche $W_J w$ est donc contenue dans θ_i. Par définition des ensembles θ, les éléments de θ_{i+1} (et donc de θ_i) sont de longueur inférieure à la longueur de w; par conséquent l'inclusion $W_J w \subset \theta_i$ montre que w est de longueur minimale dans $W_J w$, autrement dit, que $w^{-1}\alpha > 0$ pour tout $\alpha \in J$. D'autre part, il résulte de ce qui précède que wW_Iw^{-1} est contenu dans W_J (car E appartient à $\mathrm{Alg}(\{I\})$) et que $\widetilde{E}^{\theta_i}_{J,I}/\widetilde{E}^{\theta_{i+1}}_{J,I}$ est isomorphe à $\big(\mathrm{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}^G_{wL_Iw^{-1}}\big)(E)$. Puisque w est de longueur minimale dans $W_J w$, il est donc aussi de longueur minimale dans wW_I. Il s'ensuit que l'ensemble $w(I)$ est formé de racines simples et est contenu dans J. On est ramené à montrer que la suite

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{|J|=k \\ w(I) \subset J \subset S^w}} \mathrm{Ad}(w^{-1})(\mathbf{r}^G_{wL_Iw^{-1}}E) \xrightarrow{\delta_k} \bigoplus_{\substack{|J|=k-1 \\ w(I) \subset J \subset S^w}} \mathrm{Ad}(w^{-1})(\mathbf{r}^G_{wL_Iw^{-1}}E) \xrightarrow{\delta_{k-1}} \dots$$

(où $S^w := S_{w^{-1}} = \{\alpha \in S \mid w^{-1}\alpha > 0\}$, notation de [A, p. 2182]) est exacte. Il résulte de la transivité du foncteur $\mathbf{r}^G_L$ (voir par exemple [BZ, prop. 2.3 (c)]) que, pour I, J et K des parties de S telles que $w(I) \subset J$ et $w(I) \subset K \subset J$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} E_{U_J} & \xrightarrow{\pi^J_{w(I)}} & E_{U_{w(I)}} \\ {\scriptstyle \pi^J_K}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ E_{U_K} & \xrightarrow[\pi^K_{w(I)}]{} & E_{U_{w(I)}} \end{array}$$

La construction de l'isomorphisme de $\widetilde{E}_{J,I}^{\theta_i}/\widetilde{E}_{J,I}^{\theta_{i+1}}$ sur $\mathrm{Ad}(w^{-1})(\mathbf{r}_{wL_Iw^{-1}}^G E)$ montre alors que les applications de transitions δ_k sont l'identité de $\mathrm{Ad}(w^{-1})(\mathbf{r}_{wL_Iw^{-1}}^G E)$ multipliée par le signe qu'il faut. La suite ci-dessus est donc le produit tensoriel de $\mathrm{Ad}(w^{-1})(\mathbf{r}_{wL_Iw^{-1}}^G E)$ et du complexe de Koszul $\Lambda^\cdot(\mathbb{C}^{S^w - w(I)})$ translaté de $|S|-|S^w|$. Il est bien connu que ce complexe est acyclique sauf si $S^w = w(I)$ (voir par exemple [S, chap. IV.A]). Mais si $S^w = w(I)$, la suite se réduit à

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ad}(w^{-1})(\mathbf{r}_{wL_Iw^{-1}}^G E),$$

qui est encore exacte. □

Remarques. (1) Si $w \in W$ est tel que $w(I) \subset \Phi^+$ et $S^w = w(I)$, alors $w(S-I) \subset -\Phi^+$ (voir [A, bas de la page 2182]) et, par conséquent, w^{-1} est égal à l'élément de plus grande longueur dans $\mathcal{D}(I,\emptyset)$, élément noté w_I dans [A].

Nous désignons par $\widetilde{D}_G$ l'application qui à $E \in \mathrm{Alg}(\{I\})$ associe le conoyau $E^\#$ de l'application $d_{|I|}$. Pour tout $E \in \mathrm{Alg}(\{I\})$, on a $\widetilde{D}_{L_I}(\mathbf{r}_{L_I}^G(E)) = \mathbf{r}_{L_I}^G(E)$. Le calcul précédent, appliqué au dernier cran, calcule $(\widetilde{D}_G(E))_{U_I} = (\mathbf{r}_{L_I}^G \circ \widetilde{D}_G)(E)$:

$$(**) \quad (\mathbf{r}_{L_I}^G \circ \widetilde{D}_G)(E) = (\mathrm{Ad}(w_I) \circ \widetilde{D}_{L_{I'}} \circ \mathbf{r}_{L_{I'}}^G)(E), \text{ pour tout } E \in \mathrm{Alg}(\{I\}),$$

où $I' = w_I^{-1}(I)$.

L'égalité $(**)$ et le fait que $[\widetilde{D}_G(E)] = (-1)^{|I|} D_G([E])$ (voir [A, cor. 3.9 (a)]) montrent que $(\mathbf{r}_{L_I}^G \circ D_G)(E) = (\mathrm{Ad}(w_I) \circ D_{L_{I'}} \circ \mathbf{r}_{L_{I'}}^G)(E)$, égalité qui est un cas particulier de [A, th. 1.7 (2)].

(2) J. Bernstein a aussi annoncé le théorème prouvé ici (colloque Luminy 1994). Dans le cas des représentations lisses de longueur finie une preuve de nature différente de notre théorème figure dans [P. Schneider et U. Stuhler, *Representation theory and sheaves on the Bruhat–Tits building*, Prépublication 1995, section IV §5].

References

[A] A.-M. Aubert, *Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 2179–2189. MR **91i:**22025

[B] J.N. Bernstein (rédigé par P. Deligne), *Le "centre" de Bernstein*, Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984. MR **86e:**22028

[BZ] J.N. Bernstein et A. Zelevinski, *Induced representations of reductive p-adic groups I*, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. **10** (1977), 441–472. MR **58:**28310

[C] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p–adic reductive groups*, Prépublication 1974 (Nouvelle version Mai 1995).

[S] J.-P. Serre (Cours au Collège de France 1957–1958, rédigé par P. Gabriel), *Algèbre Locale. Multiplicités*, Lecture Notes in Math., vol. 11, Springer (deuxième édition), Berlin–Heidelberg–New-York, 1965. MR **34:**1352

Ecole Normale Supérieure, L.M.E.N.S.–D.M.I. (C.N.R.S. U.R.A. 762), 45 rue d'Ulm, F–75005 Paris, France

E-mail address: aubert@dmi.ens.fr