TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 353, Number 12, Pages 5071–5093
S 0002-9947(01)02831-8
Article electronically published on July 17, 2001

LA TRANSITION VERS L'INSTABILITÉ POUR LES ONDES DE CHOC MULTI-DIMENSIONNELLES

DENIS SERRE

ABSTRACT. We consider multi-dimensional shock waves. We study their stability in Hadamard's sense, following Erpenbeck and Majda's strategy. When the unperturbed shock is close to a Lax shock which is already 1-d unstable, we show, under a generic hypothesis, that it cannot be strongly stable. We also characterize strong instability in terms of a sign of an explicit quadratic form. In most cases, the instability under 1-d perturbations, which occurs for exceptional shock waves, characterizes a transition between weak stability and strong instability in the multi-dimensional setting.

RÉSUMÉ. Nous considérons la stabilité des ondes de choc multi-dimensionnelles, en suivant la stratégie d'Erpenbeck et Majda. Lorsque le choc non perturbé est proche d'un choc de Lax longitudinalement instable, nous montrons, moyennant une hypothèse générique, que des ondes de surface sont présentes, empêchant ainsi la stabilité forte. Nous donnons aussi un critère d'instabilité forte en termes de signe d'une certaine forme quadratique. L'instabilité 1-d d'un choc est en général facile à établir, car elle revêt un caractère exceptionnel. Elle apparaît comme une transition entre la stabilité faible et l'instabilité dans le contexte multi-d.

1. INTRODUCTION

Considérons un système de lois de conservation en d ($d \geq 2$) variables d'espace

$$\partial_t u + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_\alpha f^\alpha(u) = 0, \tag{1.1}$$

où l'inconnue $u(x,t)$ est à valeurs dans un ouvert convexe $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Notons $A^\alpha(u) = df^\alpha(u)$ la différentielle de f^α. Etant donné $\xi \in \mathbb{R}^d$, on note aussi $A(u;\xi) = \sum_\alpha \xi_\alpha A^\alpha(u)$ et $f(u;\xi) = \sum_\alpha \xi_\alpha f^\alpha(u)$. On suppose que ce système est strictement hyperbolique: les matrices $A(u;\xi)$ sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$, les valeurs propres étant de multiplicités indépendantes de (u,ξ), lorsque $\xi \neq 0$.

Nous nous donnons une onde de choc dans la direction du dernier axe de coordonnées. Ce choc non perturbé est

$$U(x,t) = \begin{cases} u^l, & x_d < \sigma t, \\ u^r, & x_d > \sigma t, \end{cases}$$

Received by the editors September 8, 1999 and, in revised form, December 21, 2000.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35L50; Secondary 35L65, 35L67.
Key words and phrases. Shock waves, Kreiss-Lopatinski condition, evolutionary condition.
Travail effectué en accomplissement du projet TMR "Hyperbolic conservation laws", contract #ERB FMRX-CT96-0033.

où $\sigma \in \mathbb{R}$ est la vitesse du choc et $u^{l,r} \in \mathcal{U}$ sont les deux états de part et d'autre du choc. Le but de cet article est l'étude de la stabilité multi-dimensionnelle des chocs voisins du choc non perturbé, lorsque celui-ci est instable dans la seule direction $\vec{e}_d$.

Nous rappelons à la première section la méthode d'Erpenbeck et Majda [6, 22] pour l'étude de la stabilité multi-dimensionnelle du choc, stabilité au sens d'Hadamard. En résumé, pour un choc de Lax (nous discutons à la fin de cette introduction le cas des autres types de choc), on peut construire une fonction $D : \mathbb{R}^{d-1} \times H \to \mathbb{C}$, où H est le demi-plan fermé dans $\mathbb{C}$, défini par $\Re\tau \geq 0$. La fonction continue $(\eta, \tau) \mapsto D(\eta, \tau)$ est positivement homogène de degré un, analytique par rapport à η et holomorphe par rapport à τ lorsque $\Re\tau > 0$. Le choc est linéairement instable si et seulement si D s'annule pour un couple (η, τ) avec $\Re\tau > 0$. L'instabilité est associée à des modes $\exp(\tau t + i\eta \cdot y)$ du problème linéarisé. Comme $D(\rho\eta, \rho\tau) = 0$ pour tout $\rho > 0$, le taux de croissance $\rho\Re\tau$ n'est pas borné: l'instabilité est donc du type d'Hadamard. En revanche, lorsque D ne s'annule pas dans $\mathbb{R}^{d-1} \times H$, on dit que le choc est fortement (ou uniformément) stable. Enfin, dans le cas intermédiaire où D s'annule seulement au bord, on parle de stabilité faible. Un exemple typique de stabilité faible est celui de l'élasticité linéaire dans un demi-plan (où le bord du domaine joue le même rôle que le front d'un choc), en raison de la propagation des ondes de Rayleigh le long du bord. Il existe aussi des situations moins favorables, où les modes correspondant aux zéros de D sur $\mathbb{R}^{d-1} \times i\mathbb{R}$ ne sont pas d'énergie finie.

Dans le développement en série au voisinage de l'origine (dont on prouve ci-dessous l'existence)

$$\frac{1}{i} D(\xi, i) = \frac{1}{\tau} D(-i\tau\xi, \tau) = D_0 + D_1(\xi) + D_2(\xi) + \cdots,$$

les expressions D_j sont des polynômes homogènes de degré j à coefficients réels. En particulier, D_0 est une constante, D_1 une forme linéaire et D_2 une forme quadratique sur $\mathbb{R}^{d-1}$.

Lorsque D_0 est nul, on a $D(0, 1) = 0$, ce qui signifie que le choc est instable sous des perturbations longitudinales. Autrement dit, il est instable pour le système réduit à une seule variable spatiale

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_d} f^d(u) = 0. \tag{1.2}$$

Pour un p-choc de Lax, cette situation a lieu lorsque

$$\Delta := \det(R^1(u^l), \ldots, R^{p-1}(u^l), u^r - u^l, R^{p+1}(u^r), \ldots, R^n(u^r)) = 0, \tag{1.3}$$

où les $R^j(u)$ sont les vecteurs propres de $A^d(u)$, correspondant aux ondes qui sortent du choc.

Comme les paires (u^l, u^r) qui satisfont la condition de Rankine-Hugoniot ne sont généralement pas isolées, on peut envisager le cas où, l'un des états u^l étant fixé, l'ensemble $H^p(u^l)$ des états u^r pour lesquels (u^l, u^r) est un p-choc de Lax, contient un point V en lequel (1.3) a lieu. Il y a alors principalement deux possibilités. Ou bien tous les points de $H^p(u^l)$ proches de V satisfont (1.3), ou bien D_0 change de signe en V le long de $H^p(u^l)$. Nous considérons ici le second cas et étudions la stabilité des chocs pour lesquels u^r est voisin de V. Bien entendu, nous ne cherchons, parmi les racines de $D(\cdot, 1)$, que celles qui sont proches de l'origine et qui sont de la forme $\rho\eta$, où $\rho \in \mathbb{C}$ et le vecteur η est réel. Une étude complète de toutes les racines de $D(\cdot,\cdot)$ nécessite en plus la connaissance de toutes celles associées au choc (u^l, V).

Nos résultats, qui concernent donc les chocs (u^l, u^r) où $u^r \in H^p(u^l)$ est voisin de V, sont de deux sortes. Premièrement, si la forme linéaire D_1 n'est pas nulle, $D(\xi, 1)$ s'annule pour un vecteur imaginaire pur; ce qui signifie que D admet une racine (η, τ) avec η réel et $\tau \in i\mathbb{R}$. Le mode correspondant est une onde de surface, au mieux d'énergie finie. Même si le choc est stable, il ne peut pas l'être fortement, au sens de Majda. Notre second énoncé dit que, s'il existe un vecteur réel η du noyau de D_1, pour lequel $D_2(\eta) \neq 0$, alors les chocs entre u^l et u^r, avec u^r voisin de V et $D_0 D_2(\eta) < 0$ sont fortement instables (le nombre D_0 étant calculé pour le choc entre u^l et u^r, il n'est pas nul si $u^r \neq V$). Autrement dit, le problème linéarisé est instable au sens d'Hadamard. Comme D_0 change de signe en V, on voit que, si D_2 n'est pas nulle sur $\ker D_1$ en V, alors au moins une branche de $H^p(u^l) \setminus \{V\}$ est constituée de points u^r pour lesquels le choc $u^l \mapsto u^r$ est instable.

Les applications sont de deux sortes. Tout d'abord, en l'absence de symétrie, D_1 est génériquement non nulle. Il y a donc des ondes de surface dès la dimension deux. Dans une situation réaliste ($d = 3$), $\ker D_1$ est une droite, sur laquelle la restriction de D_2 est de signe constant, généralement non nulle. En dimension plus grande, si la restriction de D_2 à $\ker D_1$ prend des valeurs positives **et** négatives, alors tous les chocs (u^l, u^r) sont instables, pour u^r proche de V. C'est le cas générique si $n = 2$ et $d \geq 4$, car alors D_2 est un produit de deux formes linéaires, donc est (en général) de la forme $X^2 - Y^2$.

L'autre situation standard est celle d'un système dont le groupe d'invariance contient le groupe orthogonal $O_d(\mathbb{R})$. On peut construire la fonction D de sorte que $D(\xi, i)$ soit également invariant sous l'action de $O_{d-1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire ne dépende que de la norme euclidienne $\|\xi\|$. Dans ce cas, D_1 est nulle et V est un point de transition sur $H(u^l)$ entre les états u^r associés à un choc faiblement stable et ceux associés à un choc instable, dès que $d \geq 2$. Cette situation se rencontre par exemple en mécanique des fluides (Majda [23], page 150, ou [22], page 44), bien qu'elle n'ait pas été expliquée auparavant.

L'analyse présentée ici est également applicable au problème mixte pour les systèmes hyperboliques linéaires et non linéaires. En général (c'est-à-dire sauf le cas $d = 2$ sans symétrie), la situation d'instabilité longitudinale se présente comme une transition de la stabilité faible vers l'instabilité. Un exemple qui illustre bien les deux cas décrits ci-dessus est celui de l'équation des ondes dans un demi-espace

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad x_d > 0.$$

Dans un premier temps, nous considérons la condition aux limites $\partial u/\partial\nu = \gamma \partial u/\partial t$, où $\partial/\partial\nu = -\partial/\partial x_d$ est la dérivée normale. Le paramètre critique, pour lequel l'instabilité longitudinale a lieu, est $\gamma = 1/c$. Comme l'EDP ainsi que la condition aux limites sont invariantes sous l'action de $O_{d-1}(\mathbb{R})$ (qui agît sur les variables transversales), nous sommes dans le second cas: $1/c$ sépare les cas instables (pour $\gamma > 1/c$) des cas faiblement stables (pour $\gamma \in [0, 1/c[$). Dans un deuxième temps, la condition aux limites tient compte des variables transversales (voir l'exercice 14.1 dans [24]):

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \cdot \nabla_y u, \quad \lambda \neq 0.$$

Ce problème n'a plus l'invariance par rotation en y et on se trouve dans le cas “générique” :

Cas $d = 2$**:** pour γ proche du paramètre critique $1/c$, le problème mixte est faiblement bien posé et admet des ondes de surfaces; ce problème ne devenant mal posé que pour des valeurs encore plus grandes de γ, à savoir $\gamma > c^{-1}\sqrt{1+\lambda^2}$.

Cas $d = 3$**:** $1/c$ sépare les problèmes mixtes faiblement bien posés (pour $\gamma \in [0, 1/c[$), des problèmes mal posés (pour $\gamma \geq 1/c$).

Extension aux autres types de choc. H. Freistühler [9, 10] a adapté la procédure d'Erpenbeck et Majda pour les chocs sous-compressifs et S. Benzoni [2, 3] a traité le cas des transitions de phase pour un fluide de Van der Waals. Dans ce cas, la condition de Rankine-Hugoniot est complétée par une ou plusieurs relation(s) algébrique(s), en nombre $l + 1 - n$, où l est le nombre des ondes qui sortent du choc ($l \geq n$). Dans la relation (1.3), le déterminant est de taille $(l + 1) \times (l + 1)$ (au lieu de $n \times n$ pour un choc de Lax); il y a l vecteurs propres $R^j(u^{r,l})$ ainsi que le saut $[u]$ sur les n premières lignes, tandis que les $l + 1 - n$ dernières lignes sont obtenues par linéarisation des conditions de transmission supplémentaires. La situation est légèrement différente de celle des paragraphes suivants, parce que V est en général isolé dans l'ensemble $H(u^l)$. Pour considérer des chocs perturbés, on doit donc autoriser des variations de l'état u^l. On considérera donc une courbe paramétrée $s \mapsto (u^l, u^r; \sigma)$, qui satisfait toutes les conditions de transmission, et le long de laquelle $D(0; 1)$ s'annule en changeant de signe. Bien entendu, on aurait pû faire ce choix même pour un choc de Lax.

Une autre extension possible concerne les chocs super-compressifs. Cela peut surprendre *a priori*, car le nombre trop faible des ondes sortant du choc empêche de mener une analyse similaire à celle d'Erpenbeck et Majda. Cependant, le travail récent de Zumbrun et Serre [26] a montré d'une part que le determinant de Lopatinski (lorsqu'il peut être défini) décrit la limite, pour les grandes longueurs d'onde, de la fonction d'Evans d'un profil de viscosité, et d'autre part que cette limite peut être calculée pour tous les types de chocs non-caractéristiques, y compris les chocs super-compressifs. Par ce biais, on peut donc aussi définir D et $\Delta = D(0, 1)$ dans ce cas. Cependant, l'analyse qui suit ne permet plus de conclure à l'instabilité multidimensionelle du choc (non visqueux), puisque D n'a plus le sens donné par Majda ou Freistühler. Voici la conclusion qu'on peut tirer: Un choc super-compressif où Δ s'annule en changeant de signe constitue une transition vers des chocs pour lesquels D a des racines (η, τ) avec $\Re\tau > 0$ (si $d = 3$, ou si $d = 2$ avec symétrie). D'après le théorème 7.6 de [26], les profils de ces chocs sont instables.

Remarque. Pour les chocs sous- ou super-compressifs, la fonction D ne peut pas être calculée seulement au moyen du flux f. Dans le premier cas, elle tient compte du choix des conditions de transmission supplémentaires. Dans le second, la famille des profils de viscosité joue un rôle essentiel, et celle-ci dépend du choix du tenseur de viscosité.

La condition (1.3) *dans l'étude de l'instabilité.* La condition (1.3) est d'abord apparue dans l'analyse par Bethe [4] du “wave-splitting”. Cette idée a été ensuite formalisée par Jeffrey et Taniuti [17] comme un principe d'évolution: si

$$\det(R^1(u^l), \ldots, R^{p-1}(u^l), u^r - u^l, R^{p+1}(u^r), \ldots, R^n(u^r)) \neq 0, \tag{1.4}$$

alors le problème mono-dimensionnel de la propagation de l'onde de choc s'écrit comme un problème d'évolution. Majda [22, 23] montre en fait que c'est une condition nécessaire et suffisante de stabilité non-linéaire, toujours si $d = 1$. Cette condition est appelée *stabilité linéaire*, et notée (LS), par H. Freistühler dans plusieurs articles. Voir par exemple [8].

Pour les chocs visqueux, T.-P. Liu [20] montre que (1.4) est nécessaire pour qu'un profil soit asymptotiquement stable, avec un partage de la masse de la perturbation initiale, entre les modes sortants (ondes de diffusion linéaires et/ou non-linéaires) et une translation du profil, ce qui constitue une variante de "wave-splitting analysis". Cette condition est toujours satisfaite pour des chocs de faible amplitude et c'est sous cette hypothèse que Liu et ses successeurs obtiennent des résultats de stabilité non-linéaire.

Plus récemment, Gardner et Zumbrun [15] découvrent que le signe de Δ est essentiel: lorsque le déterminant est du "mauvais" signe, l'opérateur linéarisé autour d'un profil admet une valeur propre réelle strictement positive. Bien qu'il ne s'agisse pas d'une instabilité d'Hadamard, le taux de croissance des perturbations est de l'ordre de l'inverse du paramêtre de viscosité, c'est-à-dire de l'inverse de l'épaisseur de la zone du choc. Ce résultat est compatible avec celui de Liu parce que Δ a le "bon" signe pour un choc de faible amplitude. Puis Freistühler et Zumbrun [12] produisent, en utilisant un argument de conservation de la masse, des exemples de chocs satisfaisant (1.3) et qui sont à la frontière entre la stabilité et l'instabilité (non-linéaire) des profils de viscosité. Ils confirment ainsi l'analyse de [15].

Tous les travaux cités ci-dessus ne concernent que des situations mono-dimensionnelles[1]. En revanche, Zumbrun et Serre [26], étudiant la limite, pour les grandes longueurs d'ondes, du problème visqueux linéarisé, montrent que l'instabilité (d'Hadamard) du choc non visqueux entraine l'instabilité (asymptotique) du profil, et ceci quelquesoit le type de perturbation physiquement raisonnable. A la lumière du théorème 3.2 ci-dessous, on voit qu'à nouveau, le (mauvais) signe du déterminant implique l'instabilité d'un profil, typiquement multi-d cette fois ($d = 3$, ou $d = 2$ avec symétrie). A première vue, ce résultat n'apporte rien à l'étude de Gardner et Zumbrun, pourtant il en diffère sensiblement. Le "mauvais" signe mis en évidence ici est purement dû au système hyperbolique. Il ne dépend pas du choix d'une perturbation éventuelle, alors que c'est le cas dans l'analyse de [15]. On peut donc envisager des situations où les profils de viscosité des chocs $u^l \mapsto u^r$, avec u^r voisin de V, soient longitudinalement instables lorsque u^r appartient à l'une des branches de $H^p(u^l) \setminus \{V\}$, et transversalement instables lorsque u^r appartient à l'autre branche. Dans ce cas, la condition (1.3) apparaît non comme une transition entre stabilité faible et instabilité mais comme transition entre deux types d'instabilité.

Note added in proofs: Transitions of different nature have been recently studied by F. Rousset, S. Benzoni, K. Zumbrun and the author (submitted preprint). They give a complete picture of the hyperbolic IBVP.

Remerciements. L'auteur remercie sincèrement S. Benzoni, H. Freistühler et K. Zumbrun pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail.

[1]Majda étudie des problèmes multi-d, mais le déterminant (1.4) ne joue de rôle qu'en une variable d'espace.

2. Le déterminant de Lopatinski

2.1. **La procédure d'Erpenbeck et Majda.** Nous suivons ici le mémoire de Majda [22]. Notant u la solution de (1.1), déterminée par une condition initiale proche de U (pour autant que la solution non perturbée U soit stable), on écrit l'équation du front perturbé sous la forme $x_d = X(y,t)$, en notant $y = (x_1, \dots, x_{d-1})$ l'ensemble des variables transversales. La fonction X est une inconnue du problème de Cauchy, qui est *a priori* proche de σt, tandis que u est proche de U. On fait le changement de variables $(x,t) \mapsto (y,z,t)$, avec $z := x_d - X(y,t)$, qui redresse le front. Définissant le champ v par

$$v(y,z,t) = u(x,t),$$

c'est-à-dire

$$u(x,t) = v(y, x_d - X(y,t), t),$$

on obtient le système suivant, dans le domaine $z \neq 0$:

$$\partial_t v - (\partial_t X)\partial_z v + \sum_{\alpha=1}^{d-1} \{\partial_\alpha f^\alpha(v) - (\partial_\alpha X)\partial_z f^\alpha(v)\} + \partial_z f^d(v) = 0. \tag{2.1}$$

Par ailleurs la condition de Rankine-Hugoniot s'écrit

$$[v]\partial_t X + \sum_{\alpha=1}^{d-1} \partial_\alpha X [f^\alpha(v)] - [f^d(v)] = 0, \tag{2.2}$$

où on a noté $[g(v)](y,t) = g(v(y,0^+,t)) - g(v(y,0^-,t))$ le saut d'une expression quelconque de v à travers le front. Il est clair que (v,X) est une solution régulière de (2.1) (pour $z \neq 0$) et (2.2), si et seulement si u est une solution régulière par morceaux de (1.1), avec un seul front de choc.

Une solution particulière du problème redressé (2.1), (2.2) est donnée par $\hat{X} = \sigma t$, $\hat{v} = u^l$ pour $z < 0$ et $\hat{v} = u^r$ pour $z > 0$. Nous examinons donc la stabilité linéarisée de celle-ci, au sens de Kreiss [18]. Le linéarisé du problème (2.1), (2.2) en $(\hat{v}, \hat{X})$ est

$$\partial_t V + \sum_{\alpha=1}^{d-1} A^\alpha(\hat{v})\partial_\alpha V + (A^d(\hat{v}) - \sigma)\partial_z V = 0, \tag{2.3}$$

$$\partial_t Y[\hat{v}] + \sum_{\alpha=1}^{d-1} \partial_\alpha Y [f^\alpha(\hat{v})] + [(\sigma - A^d(\hat{v}))V] = 0. \tag{2.4}$$

On a noté $[\hat{v}] = u^r - u^l$, etc. L'inconnue de ce problème est le couple

$$(V(y,z,t), Y(y,t)), \quad z \neq 0.$$

Comme les coefficients de ce système sont indépendants de y, nous passons en variable de Fourier (notée $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$) pour y. Par ailleurs, la stabilité linéarisée est examinée en cherchant les éventuels modes instables, ce qui conduit à utiliser une variable de Laplace τ (avec $\Re\tau > 0$) pour le temps. On cherche donc les modes de la forme

$$V(y,z,t) = e^{i\eta\cdot y + \tau t} W(z), \quad Y(y,t) = e^{i\eta\cdot y + \tau t}\mu,$$

où $\mu \in \mathbb{C}$ et W est une fonction bornée. On se ramène donc au système différentiel

$$(\tau + iA(\hat{v};\eta))W + (A^d(\hat{v}) - \sigma)\frac{dW}{dz} = 0, (z \neq 0), \tag{2.5}$$

$$\mu(\tau[\hat{v}] + i[f(\hat{v};\eta)]) + [(\sigma - A^d(\hat{v}))W] = 0. \tag{2.6}$$

Le système différentiel ordinaire (2.5) se découple en deux systèmes à coefficients constants, indépendants l'un de l'autre: un pour $z > 0$, l'autre pour $z < 0$. Supposant que le système (1.1) est hyperbolique en $u^{l,r}$ et que le choc n'est pas caractéristique (σ n'est pas valeur propre de $A^d(u^{r,l})$), on sait que les valeurs propres des matrices

$$(\sigma - A^d(w))^{-1}(\tau + iA(w;\eta)), \quad (w = u^r \text{ ou } u^l)$$

ne sont pas imaginaires pures lorsque $\Re\tau > 0$. Par continuité, le nombre de valeurs propres d'une telle matrice, dont la partie réelle est d'un signe donné, est égal au nombre des valeurs propres ayant ce signe pour la matrice $\sigma - A^d(w)$ (en comptant les multiplicités). En particulier, les solutions bornées de (2.5) décroissent exponentiellement à l'infini et forment un espace vectoriel $\mathcal{E}(\eta,\tau)$, dont la dimension est constante. Cet espace vectoriel dépend holomorphiquement de τ et analytiquement de η. Il s'écrit comme un produit $\mathcal{E}^l(\eta,\tau) \times \mathcal{E}^r(\eta,\tau)$, en considérant les restrictions de W à $\mathbb{R}^-$ et à $\mathbb{R}^+$. On sait aussi que chaque facteur $\mathcal{E}^{l,r}(\eta,\tau)$, de dimension constante, admet un prolongement par continuité au domaine $\mathbb{R}^{d-1} \times H$ privé de l'origine (la singularité à l'origine est due au fait que $(\eta,\tau) \mapsto \mathcal{E}(\eta,\tau)$ est homogène de degré zéro).

Utilisant la bijection $W|_{\mathbb{R}^+} \mapsto W(0^+)$, on identifie $\mathcal{E}^r(\eta,\tau)$ au sous-espace stable $E^r(\eta,\tau)$ de la matrice

$$(\sigma - A^d(u^r))^{-1}(\tau + iA(u^r;\eta)).$$

De la même façon, $\mathcal{E}^l(\eta,\tau)$ est identifié au sous-espace instable $E^l(\eta,\tau)$ de la matrice

$$(\sigma - A^d(u^l))^{-1}(\tau + iA(u^l;\eta)).$$

Cependant, la manière dont $W(0^\pm)$ apparaît dans l'équation (2.6) suggère de considérer plutôt les vecteurs

$$(\sigma - A^d(u^l))W(0^-), \quad (A^d(u^r) - \sigma)W(0^+),$$

qui sont donc des vecteurs arbitraires de $F^l(\eta,\tau)$, sous-espace instable de

$$(\tau + iA(u^l;\eta))(\sigma - A^d(u^l))^{-1}$$

et de $F^r(\eta,\tau)$, sous-espace stable de

$$(\tau + iA(u^r;\eta))(\sigma - A^d(u^r))^{-1}$$

respectivement.

A partir de maintenant, nous supposons que $(u^l, u^r; \sigma)$ est un p**-choc de Lax** pour le système réduit (1.2). On a donc, avec des notations classiques

$$\lambda_{p-1}(u^l) < \sigma < \lambda_p(u^l), \quad \lambda_p(u^r) < \sigma < \lambda_{p+1}(u^r).$$

Il s'ensuit que $\dim F^l(\eta,\tau) = p-1$ et $\dim F^r(\eta,\tau) = n-p$. Bien entendu, $F^{r,l}(\eta,\tau)$ partagent les propriétés de $\mathcal{E}(\eta,\tau)$ évoquées ci-dessus.

Remarques. - L'homogénéité montre que $F^{r,l}(\eta,\tau)$ converge, pour $|\tau|\to+\infty$, vers $F^{r,l}(0,1)$, qu'on notera $F^\pm$. Ce sont les sous-espaces stable de $\sigma-A^d(u^r)$ et instable de $\sigma-A^d(u^l)$ respectivement. Cette remarque est essentielle car notre analyse concerne justement les grandes valeurs de τ, plus précisément les couples (η,τ) pour lesquels le vecteur $\tau^{-1}\eta$ est petit.

- Contrairement à ce qu'on a supposé au début, il n'est pas nécessaire que le système soit strictement hyperbolique pour toute valeur de l'état u, mais seulement en u^r et u^l. Cette remarque est particulièrement utile lorsqu'on s'intéresse à des chocs de grande amplitude, car les situations non triviales apparaissent surtout lorsque des valeurs propres se croisent en certains points, ou même lorsqu'elles deviennent imaginaires pour u dans un ouvert borné.

Maintenant, suivant Majda et Kreiss, nous observons que le système (2.1), (2.2) souffre d'une instabilité d'Hadamard lorsqu'il existe un couple $(\eta,\tau)\in\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{C}$, avec $\Re\tau>0$, et un triplet non-trivial $(\mu,w^r,w^l)\in\mathbb{C}\times F^r(\eta,\tau)\times F^l(\eta,\tau)$, tel qu'on ait

$$\mu(\tau[\hat v]+i[f(\hat v;\eta)])=w^l+w^r. \tag{2.7}$$

2.2. **Le cas $\|\eta\| << |\tau|$.** Pour simplifier, nous faisons l'hypothèse (générique) de **stricte hyperbolicité**: les valeurs propres de $A^d(u^{r,l})$ sont non seulement réelles, mais aussi simples. Nous choisissons des vecteurs propres à droite et à gauche:

$$A^d(u^{r,l})R_j(u^{r,l})=\lambda_j(u^{r,l})R_j(u^{r,l}),\quad L_j(u^{r,l})A^d(u^{r,l})=\lambda_j(u^{r,l})L_j(u^{r,l}),$$

avec la convention $L_j\cdot R_j=1$.

Fixons $k\le p-1$. En appliquant le théorème des fonctions implicites (dans sa forme holomorphe) à l'application

$$(r,\mu;\xi)\mapsto\left((I_n+A(u^l;\xi))(\sigma-A^d(u^l))^{-1}r-\mu r, L_k(u^l)\cdot r\right),$$

on obtient une unique fonction holomorphe $\xi\mapsto(r_k(\xi),\mu_k(\xi))$, définie dans un voisinage de l'origine, telle que $r_k(\xi)$ soit un vecteur propre de la matrice

$$(I_n+A(u^l;\xi))(\sigma-A^d(u^l))^{-1},$$

associé à une valeur propre $\mu_k(\xi)$ et tel que $r_k(0)=R_k(u^l)$, $L_k(u^l)\cdot r_k(\xi)\equiv 1$. Lorsque $\eta\in\mathbb{R}^{d-1}$ et $\Re\tau>0$, on note $r_k(\eta,\tau)$ le vecteur $r_k(i\tau^{-1}\eta)$. Ces $p-1$ vecteurs engendrent le sous-espace $F^l(\eta,\tau)$. De la même manière, on définit les vecteurs $r_k(\xi)$ $(k=p+1,\dots,n)$, pour ξ petit, vecteurs propres de la matrice

$$(I_n+A(u^r;\xi))(\sigma-A^d(u^r))^{-1},$$

associés à des valeurs propres $\mu_k(\xi)$ et satisfaisant $r_k(0)=R_k(u^r)$, $L_k(u^r)\cdot r_k(\xi)\equiv 1$. A nouveau, les $n-p$ vecteurs $r_k(\eta,\tau)$ correspondant engendrent $F^r(\eta,\tau)$. Pour ξ assez petit, on a $\Re\mu_k(\xi)<0$ pour $k\le p-1$ et $\Re\mu_k(\xi)>0$ pour $k\ge p+1$. Appliquant le théorème des fonctions implicites dans sa forme réelle, on constate que, lorsque $\tau\in i\mathbb{R}$ et $\eta\in\mathbb{R}^{d-1}$, avec $\|\eta\|<<|\tau|$, les valeurs propres $\mu_k(\eta,\tau)$ sont réelles, de même que les vecteurs propres $r_k(\eta,\tau)$. On notera que les applications $(\eta,\tau)\mapsto(r_k(\eta,\tau),\mu_k(\eta,\tau))$ sont homogènes de degré zéro et un, respectivement.

Nous définissons maintenant le "déterminant de Lopatinski"

$$D(\eta,\tau):=\det(r_1(\eta,\tau),\dots,r_{p-1}(\eta,\tau),\tau[\hat v]+i[f(\hat v;\eta)],r_{p+1}(\eta,\tau),\dots,r_n(\eta,\tau)).$$

Remarquons que cette définition ne nécessite pas que $\Re\tau$ soit positive, mais seulement que $\tau^{-1}\eta$ soit petit.

Lorsque $\tau^{-1}\eta$ est petit, l'existence d'un triplet non-trivial satisfaisant (2.7) équivaut donc à l'égalité

$$D(\eta, \tau) = 0. \tag{2.8}$$

C'est cette équation que nous étudions dans la suite.

2.3. **Développement de Taylor.** Par construction, D est homogène de degré un. En fait

$$\frac{1}{\tau} D(\eta, \tau) = \det(r_1(\xi), \dots, r_{p-1}(\xi), [\hat{v}] + [f(\hat{v}; \xi)], r_{p+1}(\xi), \dots, r_n(\xi)),$$

où $\xi := i\tau^{-1}\eta \in \mathbb{C}^{d-1}$. Cependant, les vecteurs ξ de $\mathbb{C}^{d-1}$ ne sont pas tous utiles pour la recherche de l'instabilité. Seuls ceux appartenant au produit $\mathbb{C} \cdot \mathbb{R}^{d-1}$ peuvent être associés à un mode instable.

Comme le second membre de l'égalité ci-dessus est holomorphe autour de zéro, nous faisons un développement de Taylor

$$\frac{1}{\tau} D(\eta, \tau) = D_0(\xi) + D_1(\xi) + D_2(\xi) + \cdots, \quad \xi := i\tau^{-1}\eta,$$

où D_j est un polynôme homogène de degré j (une j-forme). Par exemple, D_0 est une constante, valant

$$\Delta := \det(R_1(u^l), \dots, R_{p-1}(u^l), u^r - u^l, R_{p+1}(u^r), \dots, R_n(u^r)).$$

Ce nombre joue un rôle important dans l'analyse de Majda car il caractérise la stabilité mono-dimensionelle (ou longitudinale, c'est-à-dire quand $d = 1$) du choc. Il apparaît aussi dans le travail de Liu [20] sur la stabilité des profils visqueux de chocs. Plus récemment, Freistühler et Zumbrun [12], ainsi que Gardner et Zumbrun [15] ont montré que son signe joue un rôle dans la stabilité d'un profil.

L'observation essentielle est la suivante. A cause de l'hyperbolicité, les vecteurs propres $r_k(\eta, \tau)$ sont réels lorsque $\tau \in i\mathbb{R}$ et $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $|\tau| \gg |\eta|$. On en déduit que la fonction $\delta(\xi) := \tau^{-1} D(-i\tau\xi, \tau)$ est à valeurs réelles lorsque ξ est réel et petit. De sorte que les termes D_j de son développement de Taylor sont des formes *réelles*, c'est-à-dire à coefficients réels. Bien entendu, toutes ces formes sont calculables explicitement, en différenciant par rapport à ξ l'équation aux valeurs propres des matrices

$$(I_n + A(u; \xi))(\sigma - A^d(u))^{-1}.$$

3. Etude avec paramètre

On se donne maintenant un arc paramétré Γ, inclus dans l'ensemble de Hugoniot de u^l (u^l est donc fixé une fois pour toute). On suppose que les points de Γ sont les états à droite de p-chocs de Lax. La paramétrage $s \mapsto u^r(s)$ induit donc un paramétrage de la fonction de Lopatinski $D(\eta, \tau; s)$, qui est encore définie pour ξ assez petit.

Nous nous plaçons au voisinage d'un point $V = u^r(0)$, pour lequel le choc $(u^l, u^r(0))$ est longitudinalement instable, c'est-à-dire instable pour le système réduit (1.2). Autrement dit, le choc satisfait (1.3): $D(0, 1; 0) = 0$. Nous faisons ensuite l'hypothèse générique que

$$\frac{\partial D}{\partial s}(0, 1; 0) \neq 0.$$

Utilisant la notation du paragraphe 2.3, nous pouvons réécrire cette condition sous la forme

$$\left.\frac{\partial \Delta}{\partial s}\right|_{s=0} \neq 0. \tag{3.1}$$

Le théorème des fonctions implicites nous permet alors de choisir $s := \Delta$, dans un voisinage de $s = 0$. Ce choix respecte la convention $V = u^r(0)$. Dorénavant, le développement de Taylor s'écrit donc

$$\frac{1}{\tau} D(\eta, \tau; s) = s + D_1(\xi; s) + D_2(\xi; s) + \cdots, \quad \xi := i\tau^{-1}\eta,$$

où les formes D_j sont des fonctions régulières de s sur $]-\epsilon, \epsilon[$.

3.1. **Ondes de surface.** Nous faisons maintenant l'hypothèse générique suivante:

(H1): la forme linéaire $\xi \mapsto D_1(\xi; 0)$ n'est pas identiquement nulle.

Nous choisissons alors un vecteur $\xi_0 \in \mathbb{R}^{d-1}$ pour lequel

$$D_1(\xi_0; 0) = 1.$$

Considérons l'équation $D(\xi, i; s) = 0$, où $\xi = q\xi_0$ avec $q \in \mathbb{R}$, petit. Cette équation s'écrit sous la forme $g(q, s)$, où g est une fonction régulière sur $]-\beta, \beta[\times]-\epsilon, \epsilon[$, qui admet le développement de Taylor

$$g(q, s) = s + q + \mathcal{O}(s^2 + q^2).$$

Le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'une fonction régulière $s \mapsto q(s) \sim -s$, telle que $D(q(s)\xi_0, i; s)$ soit nul. On construit donc un mode du système linéarisé, avec $\tau = i$, pour tout s assez petit. Ce mode correspond à des ondes de surfaces, qui se propagent dans la direction ξ_0, à la vitesse $\|q(s)\xi_0\|^{-1}$.

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses génériques* (3.1) *et* **(H1)**, *il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $s \neq 0$ avec $|s| < \epsilon$, l'onde de choc entre u^l et $u^r(s)$ ne soit pas uniformément stable au sens de Majda.*

Si elle est stable, elle donne lieu à des ondes de surfaces dans la direction $\eta \in S^{d-2}$, de vitesse $|D_1(\eta; 0)/q(s)| \sim |D_1(\eta; 0)/s|$, si $D_1(\eta; 0) \neq 0$.

3.2. **Instabilité forte.** Lorsque $d = 2$ et $D_1(\cdot; 0) \not\equiv 0$, on ne peut rien dire de plus que le théorème 3.1, car les zéros de D, avec $\eta \in \mathbb{R}$, s et $\tau^{-1}\eta$ étant petits, satisfont tous $\tau \in i\mathbb{R}$.

Nous considérons maintenant le cas où le noyau réel de D_1

$$N := \{\xi \in \mathbb{R}^{d-1}; D_1(\xi; 0) = 0\}$$

est non trivial, ce qui est toujours vrai si $d \geq 3$, car N est au moins un hyperplan de $\mathbb{R}^{d-1}$. C'est vrai aussi lorsque $d = 2$ si de plus $D_1(\cdot; 0) \equiv 0$. Nous faisons l'hypothèse supplémentaire

(H2): il existe un vecteur $\xi_0 \in N$ pour lequel $D_2(\xi_0; 0) \neq 0$.

Nous désignons $D_2(\xi_0; 0)$ par la lettre d_2, et $\partial D_1/\partial s(\xi_0; 0)$ par d_1. Nous cherchons enfin les solutions de $D(\xi, i; s) = 0$ sous la forme $\xi = q\xi_0$, où $q \in \mathbb{C}$. L'équation s'écrit $h(q, s) = 0$, où h est une fonction régulière sur $B(0; \beta)\times]-\epsilon, \epsilon[$. Nous avons

$$h(q, s) = s + d_1 sq + d_2 q^2 + \mathcal{O}(|s|^3 + |q|^3).$$

Par le théorème des fonctions implicites, l'ensemble des solutions est décrit localement par un paramétrage régulier $q \mapsto s = S(q)$. Comme q est complexe et s

est réel, nous décomposons l'équation en ses parties réelle et complexe (en notant $q = r + i\theta$):

$$h_r(r,\theta,s) = 0, \quad h_i(r,\theta,s) = 0,$$

où

$$h_r(r,\theta,s) = s + d_1 sr + d_2(r^2-\theta^2) + \mathcal{O}(|s|^3+|r|^3+|\theta|^3), \tag{3.2}$$

$$h_i(r,\theta,s) = (d_1 s + d_2 r)\theta + \mathcal{O}(|s|^3+|r|^3+|\theta|^3). \tag{3.3}$$

Nous résolvons tout d'abord (3.2) au moyen du théorème des fonctions implicites; l'ensemble de ses solutions est paramétré par $(r,\theta)\mapsto s = S(r,\theta)$ au voisinage de l'origine, avec

$$S(r,\theta) = d_2(\theta^2-r^2) + \mathcal{O}(|s|^3+|r|^3+|\theta|^3).$$

Bien entendu, S est une fonction régulière.

Il reste alors l'équation $H = 0$, où H est défini par

$$H(r,\theta) := h_i(r,\theta,S(r,\theta)) = d_2 r\theta + \mathcal{O}(|s|^3+|r|^3+|\theta|^3).$$

Comme la forme quadratique $(r,\theta)\mapsto d_2 r\theta$ n'est pas dégénérée, le lemme de Morse assure que, au voisinage de l'origine, l'ensemble défini par l'équation $H(r,\theta) = 0$ est la réunion de deux courbes régulières, chacune étant tangente à un axe de coordonnées. L'une d'entre elles est paramétrée par $\theta \mapsto r = \rho(\theta)$, avec $\rho(0) = \rho'(0) = 0$. Le long de cette courbe, on a $s = S_1(\theta) \sim d_2\theta^2$.

Les triplets $(r,\theta,s) = (\rho(\theta),\theta,S(\rho(\theta),\theta))$ ainsi obtenus fournissent des racines $(\eta = \xi_0,\tau;s)$ de D, avec $\tau := i\bar{q}|q|^{-2}$, pour $q = r+i\theta$. Le couple (η,τ) correspond à un mode instable dès que $\theta > 0$. Comme s et θ sont liés par une équation $s = S_1(\theta)$, on voit que des modes instables existent dès que s est du signe de d_2 et petit.

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses* (3.1) *et* **(H2)***, il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que, pour tout s du même signe que $D_2(\xi_0;0)$, avec $|s| < \epsilon$, l'onde de choc entre u^l et $u^r(s)$ soit instable au sens de Majda.*

En particulier, si la restriction de $D_2(\cdot;0)$ au noyau réel de $D_1(\cdot;0)$ n'est pas de signe constant (ce qui nécéssite $\dim N \geq 2$, c'est-à-dire $d \geq 4$, ou bien $d = 3$ avec $D_1(\cdot;0)\equiv 0$) alors tous les chocs entre u^l et $u^r(s)$ avec $|s| < \epsilon$ sont instables au sens de Majda.

Remarques. - Le critère d'instabilité présenté dans ce théorème ne fait pas intervenir la valeur de d_1, mais seulement le signe de $sD_2(\cdot,0)$ sur le noyau de $D_1(\cdot,0)$.

- Lorsque le système d'origine (1.1) est invariant sous l'action du groupe orthogonal $O_d(\mathbb{R})$, on retrouve cette symétrie dans le déterminant de Lopatinski, au moins en ce qui concerne les variables transversales: $D(\eta,i;s)$ ne dépend que $\eta\cdot\eta$. Il s'ensuit que $D_1 \equiv 0$. Le théorème 3.2 a donc un intérêt non seulement si $d = 3$, mais aussi si $d = 2$ lorsqu'on a une symétrie $O_2(\mathbb{R})$. Notons cependant que l'invariance par rotation impose à $D_2(\cdot;0)$ d'être de signe constant.

3.3. **Explicitation de D_1.** Nous allons calculer les expressions $D_1(\cdot,0)$ et $D_2(\cdot,0)$. Nous partons de la formule

$$\begin{aligned}&D_0 + D_1(\xi) + D_2(\xi) + \cdots\\&\quad = |r_1(\xi),\ldots,r_{p-1}(\xi),[u]+[f(u;\xi)],r_{p+1}(\xi)+\ldots+r_n(\xi)|,\end{aligned}$$

où on a noté entre barres le déterminant. Le développement de Taylor de $r_j(\xi)$ est noté

$$r_j(\xi) = R_j + r_{j1}(\xi) + r_{j2}(\xi) + \cdots .$$

La valeur propre $\mu_j(\xi)$ de $(I_n + A(u^{r,l};\xi))(\sigma - A^d(u^{r,l}))^{-1}$ qui lui est associée a pour développement

$$\mu_j(\xi) = \frac{1}{\sigma - \lambda_j} + m_{j1}(\xi) + m_{j2}(\xi) + \cdots ,$$

où $A^d(u^{r,l})R_j = \lambda_j R_j$. Rappelons que l'état pris en compte est u^l si $j < p$, mais u^r si $j > p$. Nous faisons l'hypothèse suivante, qui est vérifiée en pratique:

(H3) les vecteurs $R_1(u^l), \dots , R_{p-1}(u^l), R_{p+1}(u^r), \dots , R_n(u^r)$ forment une famille libre.

En particulier, le fait que D_0 soit nul pour $s = 0$ montre que $[u]$ se décompose sous la forme

$$[u] = \sum_{j\neq p} \beta_j R_j.$$

Bien entendu, $D_0(0) = \Delta$ comme indiqué précédemment. On obtient au rang suivant

$$\begin{aligned} D_1(\xi; 0) &= |r_{11}(\xi), R_2, \dots , R_n| + \cdots + |R_1, \dots , [f(u;\xi)], \dots , R_n| \\ &\quad + \cdots + |R_1, \dots , R_{n-1}, r_{n1}(\xi)|. \end{aligned}$$

Dans le j-ième déterminant, pour $j \neq p$, le p-ième vecteur est $[u]$ et peut être remplacé par $\beta_j R_j$. On peut alors permuter les deux vecteurs r_{j1} et $\beta_j R_j$, pour se ramener à un déterminant où le k-ième vecteur est R_k, pour tout $k \neq p$, tandis que le p-ième devient $-\beta_j r_{j1}(\xi)$. Par linéarité du déterminant, on obtient la formule

Théorème 3.3. *On a*

$$\begin{aligned} D_1(\xi, 0) &= \det(R_1(u^l), \dots , R_{p-1}(u^l), \\ &\quad [f(u;\xi)] - \sum_{j\neq p} \beta_j r_{j1}(\xi), R_{p+1}(u^r), \dots , R_n(u^r)), \end{aligned}$$

où les coefficients β_j sont donnés par la décomposition

$$[u] = \sum_{j<p} \beta_j R_j(u^l) + \sum_{j>p} \beta_j R_j(u^r).$$

Remarque. La construction du choc $(u^l, u^r; \sigma)$, comme l'hypothèse $\Delta_{s=0} = 0$, ne font intervenir que la dernière composante f^d du flux. En gardant fixé f^d, les vecteurs R_k, $[u]$ et donc les coefficients β_j, restent fixes. En revanche, l'expression obtenue pour $D_1(\cdot, 0)$ fait clairement intervenir les autres composantes du flux, d'une part par leur jet d'ordre zéro (*via* $[f(u;\xi)]$), d'autre part par leur jet d'ordre un (*via* les r_{j1}). En faisant varier les f^α pour $\alpha < d$, on voit que l'hypothèse **(H1)** est générique.

3.4. **Explicitation de D_2.** Poursuivant l'identification des puissances de ξ, nous obtenons $D_2(\xi,0)=\Sigma^1+\Sigma^2+\Sigma^3$, où

$$\begin{aligned}
\Sigma^1 &= \sum_{j<k}^{j,k\neq p} |R_1,\dots,r_{j1}(\xi),\dots,r_{k1}(\xi),\dots,R_n|,\\
\Sigma^2 &= \sum_{j\neq p} |R_1,\dots,r_{j2}(\xi),\dots,R_n|,\\
\Sigma^3 &= \sum_{j\neq p} |R_1,\dots,r_{j1}(\xi),\dots,[f(u;\xi)],\dots,R_n|.
\end{aligned}$$

Dans Σ^1 et Σ^2, le p-ième vecteur de chaque déterminant est $[u]$. En fait, les points désignent toujours les vecteurs R_m ou $[u]$, suivant que la position du vecteur est $m\neq p$ ou bien $m=p$. Dans Σ^1, on peut remplacer $[u]$ par $\beta_jR_j+\beta_kR_k$ dans le déterminant d'indice (j,k):

$$\begin{aligned}
\Sigma^1 &= \sum_{j<k}^{j,k\neq p} |R_1,\dots,r_{j1}(\xi),\dots,\beta_jR_j+\beta_kR_k,\dots,r_{k1}(\xi),\dots,R_n|\\
&= -\sum_{j\neq k}^{j,k\neq p} |R_1,\dots,r_{j1}(\xi),\dots,\beta_kr_{k1}(\xi),\dots,R_n|,
\end{aligned}$$

où le terme β_kr_{k1} est en p-ième position. Ainsi,

$$\Sigma^1+\Sigma^3=\sum_{j\neq p}\left|R_1,\dots,r_{j1}(\xi),\dots,[f(u;\xi)]-\sum_{k\neq p}\beta_kr_{k1}(\xi),\dots,R_n\right|.$$

D'après la proposition 3.3, il existe des formes linéaires sur le noyau N de $D_1(\cdot;0)$, qu'on note $\xi\mapsto\gamma_j(\xi)$, telles que

$$[f(u;\xi)]-\sum_{j\neq p}\beta_jr_{j1}(\xi)=\sum_{j\neq p}\gamma_j(\xi)R_j,\quad \forall\xi\in N. \tag{3.4}$$

Finalement, pour $\xi\in N$,

$$\begin{aligned}
\Sigma^1+\Sigma^3 &= \sum_{j\neq p} |R_1,\dots,r_{j1}(\xi),\dots,\gamma_j(\xi)R_j,\dots,R_n|\\
&= -\left|R_1,\dots,R_{p-1},\sum_{j\neq p}\gamma_j(\xi)r_{j1}(\xi),R_{p+1},\dots,R_n\right|.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $[u]$ peut être remplacé par β_jR_j dans le déterminant d'indice j de Σ^2. On obtient ainsi

$$\Sigma^2=-\left|R_1,\dots,R_{p-1},\sum_{j\neq p}\beta_jr_{j2}(\xi),R_{p+1},\dots,R_n\right|.$$

En définitive:

Théorème 3.4. *Pour tout $\xi\in N$, on a*

$$D_2(\xi;0)=-\left|R_1,\dots,R_{p-1},\sum_{j\neq p}(\beta_jr_{j2}(\xi)+\gamma_j(\xi)r_{j1}(\xi)),R_{p+1},\dots,R_n\right|,$$

où les formes linéaires γ_j sont définies par (3.4).

3.5. **Cas $n = 2$.** Lorsque le système ne comporte que deux équations, les calculs se simplifient un peu. Sans perte de généralité, on peut supposer que $p = 2$, de sorte que $[u]$ est colinéaire à R_1 par hypothèse. Comme $[u] \neq 0$, on peut choisir $R_1 = [u]$, c'est-à-dire $\beta_1 = 1$. On a alors

$$D_1(\xi; 0) = \det(R_1, [f(u; \xi)] - r_{11}(\xi)).$$

Puis, sur N,

$$[f(u; \xi)] = r_{11}(\xi) + \gamma(\xi) R_1$$

et finalement

$$D_2(\xi; 0) = -\det(R_1, r_{12}(\xi) + \gamma(\xi) r_{11}(\xi)).$$

Comme $L_1 \cdot r_{11}(\xi) = L_1 \cdot r_{12}(\xi) = 0$, on voit que $r_{11}(\xi) = \rho_1(\xi) R_2$ et $r_{12}(\xi) = \rho_2(\xi) R_2$, où ρ_1 est une forme linéaire et ρ_2 une forme quadratique. De plus, lorsque $L_2(u^l) A(\xi) R_1(u^l)$ est nul, R_1 est vecteur propre de la matrice

$$(I_n + A(u^l; \xi))(\sigma - A^d(u^l))^{-1},$$

de sorte que $r_1(\xi) = R_1$. En particulier, $r_{11}(\xi) = r_{12}(\xi) = 0$ et de même $D_2(\xi; 0) = 0$ si de plus $\xi \in N$. On en déduit qu'il existe une forme linéaire ρ telle que $D_2(\xi; 0) = \rho(\xi) L_2(u^l) A(\xi) R_1(u^l)$ pour tout $\xi \in N$. En résumé, la restriction de $D_2(\cdot; 0)$ à N est de rang 0, 1 ou 2, selon que la forme linéaire ρ, restreinte à N, est nulle, colinéaire à $L_2 A(\cdot) R_1$ ou indépendante de celle-ci. A nouveau, comme ces deux formes linéaires dépendent du jet de f à des ordres différents, la règle générale est que le rang de $D_2(\cdot; 0)$ est égal à $\min(d-2, 2)$. Pour $d \geq 4$, $D_2(\cdot; 0)$ est donc généralement de rang deux, produit de deux formes linéaires indépendantes sur N. Sa signature est alors $(1, d-4, 1)$: D_2 prend toutes les valeurs réelles sur N et la proposition 3.4 assure que tous les chocs $(u^l, u^r(s))$ sont fortement instables pour s petit.

Pour des systèmes de plus grande taille, une analyse similaire montre que le rang de $D_2(\cdot; 0)$ est majoré par $2(n-1)$. Cependant, lorsque le système contient l'analogue d'un champ de vitesse, on a $n \geq d$ (et même $n > d$), de sorte que cette majoration est sans intérêt.

4. Exemples et contre-exemples

Nous examinons dans cette partie la condition (1.3) pour un choc de Lax, ainsi que l'hypothèse (3.1). Puisque Δ ne dépend que du flux f^d, nous pouvons restreindre notre analyse au cas de systèmes en une seule variable d'espace.

4.1. **Lien avec le problème de Riemann.** Un choc de Lax satisfaisant la condition $\Delta \neq 0$ est dit *linéairement stable* par certains auteurs (voir par exemple Freistühler [11]) pour la raison suivante. Lorsqu'un p-choc de Lax $(u^l, u^r; s)$ est donné, on souhaite pouvoir résoudre le problème de Riemann de manière unique et continue par rapport aux données (u_-, u_+), lorsque celles-ci sont voisines de (u^l, u^r). Suivant la stratégie de Lax [19], le problème de Riemann sera composée de n ondes simples (contacts, chocs, détentes), une pour chaque champ caractéristique. La p-ième onde sera proche du $u^l \mapsto u^r$, tandis que les $n-1$ autres ondes seront de petite amplitude. Muni de cet *ansatz*, la construction de la solution revient à la résolution d'une équation implicite $N(\vec{\epsilon}; u_-, u_+) = 0$ dans $\mathbb{R}^n$, pour laquelle

$N(\vec{0}; u^l, u^r) = 0$. Il existe une solution locale unique à ce problème dès que la différentielle $d_{\vec{\epsilon}} N(\vec{0}; u^l, u^r)$ est inversible, ce qui s'écrit bien

$$\det(r_1(u^l), \dots, r_{p-1}(u^l), [u], r_{p+1}(u^r), \dots, r_n(u^r)) \neq 0.$$

En résumé, les chocs qui nous intéressent ici sont ceux au voisinage desquels la résolution du problème de Riemann est complexe, voire impossible.

4.2. **Systèmes 2×2 symétriques.** Nous cherchons maintenant des chocs de Lax de *petite* amplitude et qui satisfont (1.3) et (3.1). Compte tenu de la description faite par Lax et Liu [19, 21] des courbes d'onde, nous devons supposer qu'au moins deux valeurs propres du système $u_t + f(u)_x = 0$ se croisent en un point donné, disons à l'origine. Mais nous allons voir que cette hypothèse est insuffisante.

Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cas $n = 2$. On a donc $\lambda_1(u) \leq \lambda_2(u)$ partout et $\lambda_1(0) = \lambda_2(0)$. Par une translation galiléenne, on peut imposer $\lambda_j(0) = 0$.

Deux attitudes sont possibles. La première consiste à dire qu'une matrice 2×2 nilpotente est génériquement semblable à un bloc de Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'hyperbolicité est alors perdue en $u = 0$. Nous ne considérerons pas ce cas, parce qu'il est incompatible avec la présence d'une entropie convexe.

Lorsque le système admet une entropie $E(u)$, avec $D^2 E > 0$, il est symétrisable (voir [16]) et la matrice $df(u)$ est automatiquement diagonalisable. En particulier, $df(0) = 0_2$. Au moyen d'un changement de variable affine, on peut imposer $D^2 E(0) = I_2$. Utilisant la symétrie de $D^2 E df$ en tout point, différenciant, on obtient

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial u_k \partial u_l}(0) = \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_j \partial u_l}(0).$$

En d'autres termes, il existe une forme cubique M, telle que $f(u) = \frac{1}{2} dM(u) + \mathcal{O}(|u|^3)$. Notant aussi $A(u)$ la matrice de la forme quadratique $d^2 M$, qui dépend de u linéairement, on a $f(u) = \frac{1}{2} A(u)u + \mathcal{O}(|u|^3)$. En fait, $A(u)v = A(v)u$ et $df(u) = A(u) + \mathcal{O}(|u|^2)$.

L'étude locale consiste à supposer dans un premier temps que le flux est exactement quadratique[2]. Alors $A(u) = u_1 A^1 + u_2 A^2$, où

$$A^1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} b & c \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Nous faisons l'hypothèse générique

$$b(b - d) + c(c - a) \neq 0, \tag{4.1}$$

qui exprime que $\lambda_1(u) < \lambda_2(u)$ pour tout $u \neq 0$, ou encore que A^1 et A^2 ne commuttent pas.

Comme $df(u)$ est symétrique, elle admet une base orthonormée de vecteurs propres, qui dépend continûment de u lorsque u reste dans un domaine simplement connexe. En fait:

---

[2]De tels systèmes ont été étudiès dans [13, 14, 25]

Lemme 4.1. *Lorsque u parcourt un cercle autour de l'origine, la base propre $\mathcal{B}(u)$ subit un demi-tour. En particulier, il n'existe pas de choix continu de $\mathcal{B}(u)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*

Démonstration. Soit $e(u)$ un vecteur propre unitaire de $A(u)$, dépendant continûment de u dans un cône ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nous désignons par $\mu(u)$ la valeur propre. D'après (4.1), $e(u)$ ne peut pas être simultanément vecteur propre de A^1 *et* A^2. Comme

$$(A(u) - \mu)\frac{\partial e}{\partial u_j} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial u_j} - A^j\right) e,$$

il s'ensuit que $d_u e$ n'est pas nul. Mais comme $(u_1\partial_1 + u_2\partial_2)e \equiv 0$, cela signifie que $(u_2\partial_1 - u_1\partial_2)e$ ne s'annule pas. Autrement dit, la base $\mathcal{B}(u)$ tourne toujours dans le même sens lorsque u parcourt le cercle unité dans le sens trigonométrique.

Cependant, $\mathcal{B}(u)$ contient un vecteur $(\pm 1, 0)^t$ chaque fois que $bu_1 + cu_2 = 0$, c'est-à-dire deux fois par tour exactement. Il s'agit une fois du premier vecteur de $\mathcal{B}(u)$ et une fois du second. La base $\mathcal{B}(u)$ fait donc un demi-tour lorsque u parcourt S^1. $\square$

Nous cherchons maintenant un 2-choc $(u^l, u^r; s)$ qui satisfasse (1.3). On note $u = u^l$, $e = r_1(u^l)$ (unitaire) et on cherche donc u^r sous la forme $u + \rho e$ pour $\rho \in \mathbb{R}^*$. Ecrivons la condition de Rankine-Hugoniot, en notant que $f(u) = dM(u) = \frac{1}{2}A(u)u$:

$$\frac{1}{2}A(u + \rho e)(u + \rho e) - \frac{1}{2}A(u)u = s\rho e,$$

tandis que $A(u)e = \mu_1 e$. Puisque $\rho \neq 0$, il vient

$$A(u)e + A(e)u + \rho A(e)e = 2se.$$

Cependant, $A(v)w = A(w)v$, de sorte qu'il reste

$$A(e)e = 2\frac{s - \mu_1}{\rho}e.$$

Cependant, e ne peut être simultanément vecteur propre de $A(u)$ et de $A(e)$ que si u et e sont colinéaires. On a donc $u = (u \cdot e)e$ et donc

$$\mu_1 = 2(u \cdot e)\frac{s - \mu_1}{\rho}.$$

Le fait que $A(e)e$ soit colinéaire à e s'écrit encore $Q(e_1, e_2) = 0$, où Q est une forme cubique non triviale. On trouve ainsi une ou trois directions possibles pour les vecteurs e et u, selon le signe du discriminant de Q. On a par exemple trois directions si $(a, b, c, d) = (-1, 0, 1, 0)$, mais une seule si $(a, b, c, d) = (3, 0, 1, 0)$.

Lorsque $Q(e) = 0$ et $e \in S^1$, il existe un réel α tel que $A(e)e = \alpha e$. L'autre valeur propre de $A(e)$ est notée β. Pour un vecteur $u = re$, avec $r > 0$, on a $\lambda_1(u) = r\alpha$ et $\lambda_2(u) = r\beta$, la base propre étant $\{e, e^\perp\}$. De plus, le triplet $(u, u + \rho e; s)$ satisfait la condition de Rankine-Hugoniot dès que

$$s = \alpha(r + \rho/2).$$

Les valeurs propres de $A(u^r)$ sont $\alpha(r + \rho)$ et $\beta(r + \rho)$, les vecteurs propres étant encore e et $e^\perp$. La condition de Lax s'écrit

$$s > \alpha(r + \rho),\ \beta(r + \rho), \quad \lambda_1(u^l) < s < \lambda_2(u^l).$$

Cependant $s = \alpha(r + \rho/2)$ est strictement compris entre αr et $\alpha(r + \rho)$, de sorte que $s < \alpha r$. Ainsi, $\alpha r = \lambda_2(u^l)$, c'est-à-dire que $e = r_2(u^l)$, ce qui est absurde.

En conclusion:

Théorème 4.2. *Pour un système* 2×2 *de lois de conservation admettant une entropie strictement convexe, dont les deux valeurs propres se croisent à l'origine, avec la condition générique* (4.1)*, aucun des chocs de Lax de petite amplitude ne satisfait* (1.3).

Ce résultat, qui s'étend sans doute aux systèmes $n \times n$ dont deux valeurs propres se croisent, montre que l'existence de chocs de Lax de petite amplitude nécessite ou bien la dégénerescence $b(b - d) + c(c - a) = 0$ (qui peut être causée par une symétrie), ou bien le croisement de *trois* valeurs propres au moins.

On peut étendre l'étude ci-dessus aux autres systèmes de la forme $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$, avec $f_j(u) := \partial M/\partial u_j$, $u \mapsto M(u)$ étant une forme cubique. La proposition 4.2 s'étend aux p-chocs de Lax avec $p = 1$ ou $p = n$ (les chocs *extrèmes*). Ces systèmes décrivent le croisement générique de n valeurs propres en un même point, lorsqu'un système de lois de conservation admet une entropie fortement convexe. Par exemple, lorsque $n = 3$, seul un 2-choc de Lax peut satisfaire (1.3). Ce sera le cas au paragraphe suivant.

4.3. **Magnétohydrodynamique.** Nous considérons maintenant le système de la magnétohydrodynamique (MHD). Nous notons ρ la densité de masse, $\vec{v}$ le champ de vitesse du fluide, $\vec{z} := \rho\vec{v}$ la quantité de mouvement, $\vec{B}$ le champ magnétique, E l'énergie mécanique et $\vec{e}_3$ le vecteur unitaire dans la direction de l'onde de choc. La pression est donnée par une loi d'état $p(\rho, \varepsilon)$, où $\varepsilon = E - |\vec{B}|^2/2 - |z|^2/2\rho$. Le système, quand on se limite aux ondes qui se propagent dans la direction $\vec{e}_3$, s'écrit $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$, avec

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{z} \\ \vec{B} \\ E \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} z_3 \\ v_3\vec{z} + (p + |\vec{B}|^2/2)\vec{e} - B_3\vec{B} \\ v_3\vec{B} - B_3\vec{v} \\ v_3(E + p + \frac{1}{2}|\vec{B}|^2) - B_3\vec{v} \cdot \vec{B} \end{pmatrix}.$$

Comme $\partial_t B_3 = 0$, on peut considérer le cas où B_3 est constant et éliminer cette équation. On a alors sept équations ($n = 7$) à sept inconnues $\rho, \vec{v}, \vec{b} := (B_1, B_2), s$, où s est l'entropie.

Les vitesses de propagation sont $\lambda_{1,7} = v_3 \pm c_f$, $\lambda_{2,6} = v_3 \pm c_A$ ($c_A := \rho^{-1/2}|B_3|$), $\lambda_{3,5} = v_3 \pm c_s$ et $\lambda_4 = v_3$. Les vitesses des ondes lentes (c_s) et rapides (c_f) sont les racines du trinôme

$$(X^2 - c^2)(X^2 - B_3^2/\rho) = X^2|\vec{b}|^2/\rho,$$

où c est la vitesse du son en l'absence de champ électromagnétique. Les racines satisfont $c_s \leq c_A \leq c_f$. Le seul cas où trois valeurs propres coïncident est (à symétrie près) celui où $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$, ce qui arrive lorsque $\vec{b} = 0$ et $c(\rho) = c_A$. C'est au voisinage d'un tel état qu'on peut espérer trouver des chocs de Lax longitudinalement instables.

La propriété d'évolution, pour la propagation des ondes de choc mono-dimensionnelles, a été examinée par Akhiezer, Liubarskii, and Polovin [1]. Dans cet article, seul le nombre de caractéristiques sortantes est calculé, de sorte que seuls les chocs de Lax et les discontinuités de contact peuvent être admis *a priori*.

Mais comme le déterminant Δ n'est pas calculé, cette analyse ne donne qu'une condition *nécessaire* de stabilité 1-d. Cependant, la situation pour les "chocs d'Alfvén" est complètement comprise. Tout d'abord, il existe des 2-chocs (et par symétrie des 6-chocs), bien que les 2ème et 6ème champs caractéristiques soient linéairement dégénérés. Pour ces chocs-là, le problème mixte linéarisé se découple en deux sous-problèmes, l'un pour les linéarisés des composantes (v_1, B_1) (sans perte de généralité, on peut supposer que $B_2^{l,r} = 0$), l'autre pour les linéarisés de (ρ, s, v_2, v_3, B_2). Mais l'un de ces sous-systèmes est sous-déterminé, tandis que l'autre est sur-déterminé. En clair, il existe une relation de dépendance linéaire entre certains des vecteurs $R^1(u^l), [u], R^2(u^r), \dots, R^7(u^r)$, ce qui entraine $\Delta = 0$. Ainsi, tous les $2-$*chocs* (qu'on appelle aussi chocs "intermédiaires"), sont longitudinalement instables. En particulier, la condition (3.1) n'est jamais satisfaite.

4.4. **Un modèle réduit de la MHD.** Nous examinons maintenant un modèle simplifié, qui approche celui de la MHD au voisinage d'un point où trois valeurs propres coïncident.

Suivant Freistühler [10], nous restreignons notre étude à celle d'un système à flux quadratique $u_t + (A(u)u)_x = 0$ dont $E(u) = |u|^2$ est une entropie, qui représente l'évolution des trois modes associés aux valeurs propres qui se croisent. On a donc $A(u)u = d_u M$, pour une forme cubique. Il est raisonnable d'imposer au système réduit la symétrie $O_2(\mathbb{R})$, car le système de départ possède cette symétrie, et l'espace propre associé à la valeur propre triple la possède aussi. On décompose donc $u = (v, w)$, avec $v \in \mathbb{R}$ et $w \in \mathbb{R}^2$. La symétrie signifie que $M(v, Ow) = M(v, w)$, pour tout $O \in O_2(\mathbb{R})$. Autrement dit, $M(u) = \tilde{M}(v, |w|)$. Comme M est cubique, il vient $M(u) = \frac{1}{6}v(\rho v^2 + 3|w|^2)$. Le système correspondant est

$$\partial_t v + \frac{1}{2}\partial_x(\rho v^2 + |w|^2) = 0, \quad \partial_t w + \partial_x(vw) = 0. \tag{4.2}$$

Notons que ce système est un peu plus général que celui considéré dans [10], où ρ est pris égal à 1. Dans ce cas particulier, le système se découple en deux équations de Burgers et une équation de transport. Dans le cas général, l'équation de transport persiste. Les valeurs propres sont v et les deux racines de $P(\lambda) := (\lambda - v)(\lambda - \rho v) - |w|^2$. Puisque $P(v) = -|w|^2 \leq 0$, on a

$$\lambda_2(u) = v, \quad \lambda_1(u) \leq \min\{v, \rho v\} \leq \max\{v, \rho v\} \leq \lambda_3(u).$$

Les trois vitesses de propagation ne coïncident qu'en $u = 0$, mais v est valeur propre double lorsque $w = 0$.

D'après le paragraphe précédent, on cherche des 2-chocs de Lax $(u^r, u^l; s)$, qui satisfont donc $\lambda_1(u^{r,l}), \lambda_2(u^r) < s < \lambda_3(u^{r,l}), \lambda_2(u^l)$. De plus, on désire que $\det(R_1(u^l), [u], R_3(u^r))$ soit nul, avec la condition générique $R_1^l \wedge R_3^r \neq 0$.

Ecrivons la condition de Rankine-Hugoniot:

$$\frac{1}{2}[\rho v^2 + |w|^2] = s[v], \quad [vw] = s[w],$$

en particulier $[(v - s)w] = 0$. D'après la condition de Lax ($v^r < s < v^l$), on en déduit que w^r et w^l sont parallèles. Ainsi les vecteurs propres

$$R_2(u^{r,l}) = \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \\ -w_1 \end{pmatrix}$$

sont parallèles. Comme les bases propres sont orthogonales (car les matrices $df(u)$ sont symétriques), on en déduit que R_2^l est orthogonal à R_1^l et à R_3^r. Finalement, la condition (1.3) équivaut à

$$R_2^l \cdot [u] = 0, \tag{4.3}$$

ce qui est trivial puisque $w^l \wedge w^r = 0$.

Ainsi, tout revient à trouver un choc sur-compressif du système 2×2 suivant

$$\partial_t v + \frac{1}{2}\partial_x(\rho v^2 + z^2) = 0, \quad \partial_t z + \partial_x(vz) = 0, \tag{4.4}$$

pour lequel on ait en plus

$$v^r < s < v^l. \tag{4.5}$$

Voici comment on procède. La seconde condition de Rankine-Hugoniot implique que z^l et z^r sont de signes opposés. Eliminant entre les deux conditions, on obtient

$$\begin{cases} (s-\bar v)(z^l)^2 = (s-\rho\bar v)(v^r-s)^2, \\ (s-\bar v)(z^r)^2 = (s-\rho\bar v)(v^l-s)^2, \end{cases}$$

où on a noté

$$\bar v := \frac{v^r+v^l}{2}.$$

Il faut donc trouver v^r, v^l, s de sorte que d'une part $v^r < s < v^l$ et d'autre part $(s-\bar v)(s-\rho\bar v) > 0$. Pour cela, *on se donne un couple* $v^r < v^l$. Comme $\bar v \in]v^r, v^l[$, l'intersection J de $]v^r, v^l[$ avec le complémentaire de l'intervalle d'extrémités $\bar v$ et $\rho\bar v$ est non vide. Pour s dans J, on définit

$$z^l = \pm(v^r-s)\sqrt{\frac{s-\rho\bar v}{s-\bar v}}, \quad z^r = \pm(v^l-s)\sqrt{\frac{s-\rho\bar v}{s-\bar v}}, \tag{4.6}$$

qui sont bien de signes opposés. On pose enfin $w^{l,r} := z^{l,r}q$, où q est un vecteur unitaire arbitraire. Le triplet $(u^l, u^r; s)$ satisfait la condition de Rankine-Hugoniot pour (4.2), ainsi que (1.3) et $\lambda_2(u^r) < s < \lambda_2(u^l)$. Il reste à vérifier que $\lambda_1(u^l) < s < \lambda_3(u^r)$.

Comme on a déjà $\lambda_3(u^l) > s$, la condition $\lambda_1(u^l) < s$ équivaut à $(s-v^l)(s-\rho v^l) < (z^l)^2$, c'est-à-dire à

$$(s-v^l)(s-\rho v^l) < \frac{s-\rho\bar v}{s-\bar v}(s-v^r)^2.$$

De même, $\lambda_3(u^r) > s$ équivaut à

$$(s-v^r)(s-\rho v^r) < \frac{s-\rho\bar v}{s-\bar v}(s-v^l)^2.$$

Lorsque $\rho \neq 1$, ces deux inégalités sont évidemment satisfaites lorsque s tend vers $\bar v$ en restant dans J, puisqu'alors les seconds membres tendent vers $+\infty$ tandis que les premiers membres ont des limites finies.

Théorème 4.3. *On suppose que $\rho \neq 1$. Soit $v^r, v^l \in \mathbb{R}$, avec $v^r < v^l$. Soit $\bar v = (v^r+v^l)/2$ et J le complémentaire dans $]v^r, v^l[$ de l'intervalle (fermé) d'éxtrémités $\bar v$ et $\rho\bar v$: J contient un intervalle d'extrémité $\bar v$. Pour tout s dans J, suffisamment proche de $\bar v$, et pour tout $q \in S^1$, le triplet $((v^l, z^l q), (v^r, z^r q); s)$ est un 2-choc de Lax du système* (4.2)*, qui satisfait* (1.3).

Comme pour le système de la MHD, la condition (3.1) n'est pas satisfaite parce que (1.3) l'est identiquement. Notons que le cas $\rho = 1$, envisagé dans [11], pour lequel le système (4.2) se découple, ne marche pas: aucun 2-choc de Lax ne satisfait (1.3).

4.5. **La dynamique des gaz.** Nous considérons maintenant un gaz, décrit par les équations d'Euler. Dans un premier temps, nous étudions le cas isentropique, dont les inconnues sont la densité ρ et la vitesse longitudinale z du fluide. Nous ne tenons pas compte des composantes transversales de celle-ci, car le système complet pour les ondes planes se découple, et les ondes associées aux discontinuités de la vitesse transversale sont des contacts et non des chocs. Nous avons donc

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ z = \rho v \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} z \\ \rho v^2 + p(\rho) \end{pmatrix}.$$

Nous supposons que $p'(\rho) > 0$ (hyperbolicité). La matrice Jacobienne $df(u)$ vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix},$$

où $c = \sqrt{p'}$ désigne la vitesse du son. Les valeurs propres sont $\lambda_\pm = v \pm c(\rho)$ et les vecteurs propres associés sont $R_\pm = (1, \lambda_\pm)^T$. Pour un choc, la condition de Rankine-Hugoniot indique $[z] = \sigma[\rho]$, de sorte que $[u] = [\rho](1, \sigma)^T$. Finalement, $\det([u], R_\pm) = [\rho](\lambda_\pm - \sigma)$ n'est nul pour aucun choc de Lax. Il n'y a donc pas de choc longitudinalement instable.

Remarque. Majda [22, 23] montre que les chocs d'un gaz isentropique sont toujours linéairement stables, fortement ou faiblement selon la valeur du nombre de Mach. Le fait que (3.1) n'ait jamais lieu pour un tel gaz confirme le rôle que cette condition joue dans la transition vers l'instabilité.

Nous passons au cas d'un fluide réel, pour lequel les équations d'Euler tiennent compte de la conservation de l'énergie. Nous avons

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ z \\ \epsilon \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} z \\ \rho v^2 + p(\rho, e) \\ (\epsilon + p)v \end{pmatrix},$$

où e désigne l'énergie interne par unité de masse et $\epsilon = \rho v^2/2 + \rho e$. La vitesse du son est maintenant $c = \sqrt{p_\rho + \rho^{-2} p p_e}$ et les valeurs propres de $df(u)$ valent

$$\lambda_1 = v - c =: \lambda_-, \quad \lambda_2 = v, \quad \lambda_3 = v + c =: \lambda_+.$$

Le calcul des df est assez lourd et les λ_j ont en fait été calculées en mettant le système sous forme non conservative $U_t + M(U)U_x = 0$, avec $U = (\rho, v, e)^T$. Les vecteurs propres à droite pour $M(U)$ sont sans intérêt car il ne sont pas propres pour $df(u)$. En revanche, les vecteurs propres à gauche, disons $G_j(U)$, définissent des formes différentielles $l_j = G_j(U) \cdot dU$ et celles-ci sont intrinsèques, c'est-à-dire qu'on a aussi $l_j = L_j(u) \cdot du$. On trouve donc aisément les vecteurs L_j au moyen de $M(U)$:

$$l_\pm = \pm \rho c dv + dp,$$

avec les formules

$$\rho dv = dz - v d\rho, \quad dp = \left(p_\rho + \frac{1}{\rho} p_e \left(\frac{1}{2} v^2 - e \right) \right) d\rho - \frac{v}{\rho} p_e dz + \frac{1}{\rho} p_e d\epsilon.$$

Au moyen d'une transformation galiléenne, on peut toujours se ramener au cas d'un choc stationnaire ($\sigma = 0$). De plus, quitte à faire une réflexion, un choc de Lax peut être choisi avec $p = 3$. Ces transformations n'affectent pas la stabilité ou l'instabilité du choc. Les conditions de Rankine-Hugoniot et de Lax s'écrivent alors

$$\begin{cases} [z] = 0, \quad [zv + p] = 0, \quad [(\epsilon + p)v] = 0, \\ \qquad u^l < -c^l, \quad -c^r < u^r < 0. \end{cases}$$

Notant $m = z^l = z^r < 0$, il vient

$$\begin{cases} m^2[1/\rho] + [p] = 0, \quad \frac{m^2}{2}[\rho^{-2}] + [e + p/\rho] = 0, \\ \qquad -\rho^r c^r < m < -\rho^l c^l. \end{cases}$$

Choisissant une solution $(\rho^l, \rho^r, e^l, e^r)$ de l'équation

$$[e] + \langle p\rangle[1/\rho] = 0, \quad \langle p\rangle := \frac{p^l + p^r}{2}, \tag{4.7}$$

on construit une discontinuité stationnaire $(u^l, u^r; \sigma = 0)$ en posant

$$m := -\left(-\frac{[p]}{[1/\rho]}\right)^{-1/2},$$

puis en posant $z^l = z^r = m$. Les conditions de Rankine-Hugoniot sont ainsi satisfaites, et $m < 0$. En pratique, on demande que la discontinuité soit une onde de compression, à savoir

$$[p] < 0, \quad [\rho] < 0. \tag{4.8}$$

Ecrire (1.3), c'est-à-dire $\det(R_-(u^l), R_0(u^l), [u]) = 0$, revient à écrire $L_+(u^l) \cdot [u] = 0$, d'où l'intérêt du calcul de la forme différentielle quelques lignes plus haut. Nous obtenons ainsi la condition équivalente:

$$\left(p_\rho + \frac{1}{\rho}p_e\left(\frac{m^2}{2\rho^2} - e\right) - \frac{mc}{\rho}\right)[\rho] + \frac{1}{\rho}\left[\frac{m^2}{2\rho} + \rho e\right] = 0.$$

Dans cette égalité, ainsi que dans les calculs qui suivent, nous notons ρ, e, p pour ρ^l, e^l, p^l. La condition se simplifie en observant que $[\rho e] - e[\rho] = \rho^r[e]$, tandis que

$$\frac{1}{\rho^2}[\rho] + [1/\rho] = \frac{1}{\rho^2\rho^r}[\rho]^2 = -\frac{1}{\rho}[\rho][1/\rho].$$

Nous obtenons donc

$$\left(p_\rho - \frac{m^2}{2\rho^2}p_e[1/\rho] - \frac{mc}{\rho}\right)[\rho] + \frac{\rho^r}{\rho}p_e[e] = 0,$$

qui se simplifie au moyen de (4.7) en

$$\left(p_\rho - \frac{1}{2\rho^2}[p]p_e - \frac{mc}{\rho}\right)[\rho] = -\frac{1}{\rho^2}p_e\langle p\rangle[\rho].$$

Puis, comme $[\rho] \neq 0$, il reste

$$p_\rho + \frac{1}{\rho^2}p^r p_e = \frac{mc}{\rho},$$

c'est-à-dire

$$c^2 + \frac{1}{\rho^2}[p]p_e = \frac{mc}{\rho}.$$

Suivant Majda, nous notons alors $M = |v|/c = -v/c = -m/\rho c$ le nombre de Mach en aval. Utilisant $[p] = -m^2[1/\rho]$, notre équation se ramène à

$$p_e[1/\rho]M^2 - M - 1 = 0, \tag{4.9}$$

qui est donc la condition pour qu'un 3-choc soit longitudinalement instable.

Remarques. - L'égalité (4.9) correspond à la transition trouvée par Majda (voir [23], page 150, ou [22], page 44) entre les chocs faiblement stables et ceux qui sont fortement instables. Cette instabilité apparaît même en dimension deux, en raison de l'invariance des équations d'Euler sous l'action de $O_d(\mathbb{R})$. On voit sur cet exemple l'intérêt de cette nouvelle approche: il est bien plus simple et rapide de travailler sur le système mono-dimensionel que sur le système complet, pour trouver la transition vers l'instabilité forte.

- Lorsque la loi d'état est $p = (\gamma - 1)\rho e$, $\gamma > 1$ étant une constante, la condition de Lax implique que le choc est bien compressif, tandis que la condition de Rankine-Hugoniot assure

$$1 < \frac{\rho^l}{\rho^r} < \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad 0 < \frac{p^r}{p^l} < 1.$$

On obtient alors

$$p_e[1/\rho]M^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1 - \frac{p^r}{p^l}\right) \in]0, 1-1/\gamma[\,.$$

Finalement,

$$p_e[1/\rho]M^2 - M - 1 < -\frac{1}{\gamma} - M < 0,$$

de sorte que tout choc de Lax est longitudinalement stable. A nouveau, ce résultat concorde avec celui de Majda, qui montre que tous les chocs de Lax d'un gaz parfait sont uniformément stables.

References

[1] A. I. Akhiezer, G. Ia. Liubarskii, R. V. Polovin. The stability of shock waves in magnetohydrodynamics. *Soviet Physics JETP*, **35** (1959), pp 507-511. MR **21:**1117

[2] S. Benzoni-Gavage. Stability of multi-dimensional phase transitions in a van der Waals fluid. *Nonlinear Anal. TMA*, **31** (1998), pp 243-263. MR **99b:**76070

[3] S. Benzoni-Gavage. Stability of subsonic planar phase boundaries in a van der Waals fluid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* **150** (1999), 23–55. MR **2001a:**76109

[4] H. A. Bethe. On the theory of shock waves for an arbitrary equation of state. US Army report (1942). In: *Classic papers in shock compression science*, Springer, New York (1998), pp 421-492. CMP 98:14

[5] C. Carasso, M. Rascle, D. Serre. Etude d'un modèle hyperbolique en dynamique des câbles. *RAIRO, Modél. Math. Anal. Numér.* **19** (1985), pp 573-599. MR **87j:**73068

[6] J. J. Erpenbeck. Stability of step shocks. *Phys. Fluids*, **5** (1962), pp 1181-1187. MR **27:**5449

[7] G. R. Fowles. On the evolutionary condition for stationary plane waves in inert and reactive substances. *Shock induced transitions and phase structures in general media.* IMA vol. Math. Appl., **52**, Springer, New York (1993), pp 93–110. MR **94g:**76043

[8] H. Freistühler. Hyperbolic systems of conservation laws with rotationally equivariant flux function. *Mat. Aplic. Comp.*, **11** (1992), pp 167-188.

[9] H. Freistühler. A short note on the persistence of ideal shock waves. *Arch. Math.*, **64** (1995), pp 344-352. MR **96i:**35084

[10] H. Freistühler. Some results on the stability of non-classical shock waves. *J. PDEs*, **11** (1998), pp 23-38. MR **99e:**35142

[11] H. Freistühler. The persistence of ideal shock waves. *Appl. Math. Lett.*, **7** (1994), pp 7-11. MR **96c:**35114

[12] H. Freistühler, K. Zumbrun. Examples of unstable overcompressive shock waves, *Rédaction non publiée, RWTH Aachen*, Février 1998.

[13] E. Isaacson, B. Temple. The Riemann problem near a hyperbolic singularity, II, III. *SIAM J. Appl. Math.* **48** (1988), pp 1287-1301, 1302-1318. MR **89k:**35140

[14] E. Isaacson, D. Marchesin, B. Plohr, B. Temple. The Riemann problem near a hyperbolic singularity, I. *SIAM J. Appl. Math.* **48** (1988), pp 1009-1032. MR **89k:**35139

[15] R. Gardner, K. Zumbrun. The gap lemma and geometric criteria for instability of viscous shock profiles. *Comm. Pure Appl. Math*, **51** (1998), pp 797-855. MR **99c:**35152

[16] S. Godunov. Lois de conservation et intégrales d'énergie des équations hyperboliques. In *Nonlinear hyperbolic problems*, St-Etienne 1986. Lect. Notes Math. 1270 (1987), Springer-Verlag. CMP 20:02

[17] A. Jeffrey, T. Taniuti. *Nonlinear wave propagation. With applications to physics and magnetohydrodynamics.* Academic Press, New York (1964). MR **29:**4410

[18] H.-O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970), pp 277-298. MR **55:**10862

[19] P. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws, II. *Comm. Pure Appl. Math*, **10** (1957), pp 537-566. MR **20:**176

[20] T.-P. Liu. *Nonlinear stability of shock waves for viscous conservation laws*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., **328**. Providence, 1985. MR **87a:**35127

[21] T.-P. Liu. The Riemann problem for general systems of conservation laws. *J. Diff. Eqn.* **18** (1975), pp 218-234. MR **51:**6168

[22] A. J. Majda. *The stability of multi-dimensional shock fronts.* Memoirs of the Amer. Math. Soc. **275**. Providence, 1983. MR **84e:**35100

[23] A. J. Majda. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables.* Appl. Math. Sci, **53**. Springer-Verlag, New York, 1984. MR **85e:**35077

[24] D. Serre. *Systems of conservation laws, II.* Cambridge University Press. Cambridge (2000). MR **2001c:**35146

[25] M. Shearer, D. Schaeffer. The classification of 2×2 systems of nonstrictly hyperbolic conservation laws, with application to oil recovery. *Comm. Pure Appl. Math.* **40** (1987), pp 141-178. MR **88a:**35155

[26] K. Zumbrun, D. Serre. Viscous and inviscid stability of multidimensional shock fronts. *Indiana Univ. Math. J.*, **48** (1999), pp 937-992. CMP 2000:07

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, (CNRS UMR #5669), ENS Lyon, 46, Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

E-mail address: serre@umpa.ens-lyon.fr