TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 355, Number 2, Pages 689–711
S 0002-9947(02)03130-6
Article electronically published on October 4, 2002

ESTIMATIONS L^p DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DES ONDES SUR CERTAINES VARIÉTÉS CONIQUES

HONG-QUAN LI AND NOËL LOHOUE

Abstract. We prove R. Strichartz's L^p estimates for solutions of the wave equation on some conical manifolds.

Résumé. On prouve des estimations L^p pour les solutions de l'équation des ondes, analogues aux estimations de R. Strichartz, sur certaines variétés coniques.

1. Introduction et énoncé de résultat

Dans [7], l'un des auteurs a obtenu des estimations L^p pour l'équation des ondes sur les variétés riemanniennes complètes, simplement connexes. Cependant le résultat obtenu dans [7] étant très général n'est pas optimal; l'intervalle parcouru par l'exposant p est plus petit que d'habitude (voir [9], [10] et [1]).

Dans ce travail, on montre que même sans l'hypothèse que la variété est complète, on peut obtenir de meilleurs résultats. Pour énoncer le résultat que l'on se propose de prouver, on aura besoin des notations et définitions suivantes:

En général, si N est une variété riemannienne compacte de dimension $n-1$, le cône sur N, $C(N)$, est l'espace $\mathbb{R}^+ \times N$ muni de la métrique riemannienne

$$dr^2 + r^2 g_N, \tag{1.1}$$

où g_N est la métrique riemannienne sur N.

Dans cet article, nous supposons toujours que N est une variété riemannienne compacte sans bord, connexe de dimension $n-1 \geq 2$; nous supposons de plus que son rayon d'injectivité $\rho > \pi$.

On note d (resp. d_N) la distance riemannienne induite sur $C(N)$ (resp. N), Δ (resp. Δ_N) l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $C(N)$ (resp. N); et on note de plus, $d\mu(r,x)$ (resp. $d\mu_N(x)$) la mesure riemannienne induite sur $C(N)$ (resp. N). Nous avons évidemment:

$$d\mu(r,x) = r^{n-1} dr d\mu_N(x). \tag{1.2}$$

Si $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(C(N))$ le complété de $C_0^\infty(C(N))$ pour la norme

$$\|g\|_p^p = \int_{C(N)} |g(r,x)|^p \, d\mu(r,x) = \int\int_{\mathbb{R}\times N} |g(r,x)|^p r^{n-1} \, dr d\mu_N(x)$$

Received by the editors October 20, 1998.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35B45; Secondary 35L15, 58J45.
Key words and phrases. Opérateur d'onde, variétés coniques.

et

$$\|g\|_\infty = \mathrm{ess} \sup_{(r,x)\in C(N)} |g(r,x)|.$$

Le résultat que l'on veut prouver est le suivant:

Théorème 1.1. *Soit* $|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{n-1}$ *avec* $1 < p < +\infty$ *et* $n \geq 3$. *Alors, sur la variété conique,* $C(N) = \mathbb{R}^+ \times N$ *où* N *est une variété riemannienne compacte, sans bord, connexe de dimension* $n-1$ *et de rayon d'injectivité* $\rho > \pi$, *pour l'opérateur d'onde* $\frac{\sin t\sqrt{-\Delta}}{t\sqrt{-\Delta}}$, *il existe une constante* $C(p) > 0$ *telle que*

$$\|\frac{\sin t\sqrt{-\Delta}}{t\sqrt{-\Delta}}\, g\|_p \leq C(p)\cdot \|g\|_p, \quad \forall g \in L^p(C(N)). \tag{1.3}$$

La stratégie de la démonstration est comme suit:

1. Comme dans [7], pour $t > 0$ fixé, nous définissons une famille analytique d'opérateurs sur $C(N)$ comme suit:

$$f_{\omega,t}(-\Delta) = (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} (t\sqrt{-\Delta})^{\omega - \frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-\omega}(t\sqrt{-\Delta}), \tag{1.4}$$

pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ avec $\Re\, \omega \leq \frac{n+1}{2}$, où $J_s(z)$ est la fonction de Bessel. Nous nous intéressons au cas où $\omega = -1 + \epsilon + [1 - \epsilon + (\frac{n+1}{2})]z$ avec $0 \leq \Re\, z \leq 1$ et $\frac{3}{2} < \epsilon < 2$. Nous pouvons montrer le théorème suivant:

Théorème 1.2. *Soient* $t > 0$ *et* $\frac{3}{2} < \epsilon < 2$ *fixés. Alors, il existe une constante* $C(\epsilon) > 0$ *telle que pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$ *fixé, on a*

$$\|f_{\omega,t}(-\Delta) g\|_p \leq C(\epsilon) \|g\|_p, \quad \forall g \in L^p(C(N)), \tag{1.5}$$

où $\omega = (-1+\epsilon) + s[1 - \epsilon + \frac{n+1}{2}]\, i$ *avec* $s \in \mathbb{R}$.

2. En remarquant que $f_{\omega,t}(-\Delta)$ est borné dans $L^2(C(N))$ quand $\Re\, \omega = \frac{n+1}{2}$, d'après le Théorème 1.2, le théorème d'interpolation de Stein (voir [12]) ainsi que le théorème de convexité de Riesz, on déduit le Théorème 1.1.

Cet article est organisée de la façon suivante. A la section 2, on donne le noyau de l'opérateur $f_{\omega,t}(-\Delta)$ en utilisant les formules pour calculer le noyau de $\varphi(-\Delta)$ sur les variétés coniques dans [14] (p. 173) ou [4] (p. 276). A la section 3, on donne la preuve du Théorème 1.2. A la section 4, on montre le Théorème 1.1.

2. Le noyau de l'opérateur $f_{\omega,t}(-\Delta)$

Le but de cette section est de donner le noyau de l'opérateur $f_{\omega,t}(-\Delta)$ défini par (1.4).

Dans toute la suite, C, C_*, C^*, etc. désignerons des constantes universelles. Celles-ci pourront changer d'une ligne à une autre. On utilisera certaines notations de [15] pour les fonctions spéciales; par exemple, on note : $\Gamma(z)$ la fonction Gamma, $P^\mu_\lambda(x)$ avec $|x| < 1$ et $Q^\mu_\lambda(z)$ avec $|z| > 1$ les fonctions de Legendre. Tout d'abord, on rappelle les faits suivants:

1. Soient $\Re\,\mu \neq -\frac{1}{2}$, $\Re\,\lambda \neq -\frac{1}{2}$ et $a,\ b,\ c > 0$. Alors, on a

$$\tag{2.1} \begin{aligned} &\int_0^{+\infty} t^{1-\mu} J_\mu(at) J_\lambda(bt) J_\lambda(ct)dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a < |b-c|; \\ \dfrac{(bc)^{\mu-1}\sin^{\mu-\frac{1}{2}} A}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} a^\mu} P_{\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\mu}(\cos A) & \text{si} \quad |b-c| < a < b+c; \\ \dfrac{(bc)^{\mu-1}\sinh^{\mu-\frac{1}{2}} \mathcal{A}}{(\frac{\pi^3}{2})^{\frac{1}{2}} a^\mu} \cos\pi\lambda\ Q_{\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\mu}(\cosh \mathcal{A}) & \text{si} \quad a > b+c; \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$\tag{2.2} A = \arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A} = \cosh^{-1}\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}.$$

Voir [15] (p. 412).

2. Soient $0 < \theta < \pi$ et $\Re\,\mu_* < \frac{1}{2}$. Alors,

$$\tag{2.3} \begin{aligned} &\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu_*) P_\lambda^{\mu_*}(\cos\theta) \\ &\quad = (\frac{\pi}{2})^{-\frac{1}{2}} (\sin\theta)^{\mu_*} \int_0^\theta (\cos t_* - \cos\theta)^{-\mu_*-\frac{1}{2}} \cos[(\lambda+\tfrac{1}{2})t_*]dt_*. \end{aligned}$$

Voir [8] (p. 188).

3. Soient $\Re\,(\lambda+\mu_*+1) > 0$ et $\Re\,\mu_* < \frac{1}{2}$; alors, on a

$$\tag{2.4} \begin{aligned} &\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu_*) Q_\lambda^{\mu_*}(\cosh\theta) \\ &\quad = (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} e^{i\pi\mu_*} (\sinh\theta)^{\mu_*} \int_\theta^{+\infty} (\cosh t_* - \cosh\theta)^{-\mu_*-\frac{1}{2}} e^{-(\lambda+\frac{1}{2})t_*} dt_*. \end{aligned}$$

Voir [8] (p. 186).

On pose $\alpha = \frac{n-2}{2}$ et sur N, on définit un opérateur ν comme $\nu = (-\Delta_N + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$.

Nous notons $K_{\omega,t}((r,x),(r_*,x_*))$ le noyau de l'opérateur $f_{\omega,t}(-\Delta)$. Alors, d'après les formules (2.1), (2.3), (2.4) et les formules pour calculer le noyau de $f(-\Delta)$ sur les variétés coniques dans [14] (p. 173) ou [4] (p. 276), on en déduit que, quand

$\Re\,(\frac{n}{2}-\omega)>0$, nous avons

(2.5)
$$\begin{aligned}
&K_{\omega,t}((r,x),(r_*,x_*))\\
&= f_{\omega,t}(-\Delta)(r,r_*,\nu)\\
&= (rr_*)^{-\alpha}\int_0^{+\infty} f_{\omega,t}(\lambda^2)J_\nu(\lambda r)J_\nu(\lambda r_*)\lambda d\lambda\\
&= (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}t^{\omega-\frac{n}{2}}(rr_*)^{-\alpha}\int_0^{+\infty}\lambda^{1-(\frac{n}{2}-\omega)}J_{\frac{n}{2}-\omega}(t\lambda)J_\nu(\lambda r)J_\nu(\lambda r_*)\lambda d\lambda\\
&= \frac{1}{2}t^{2(\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\omega}\times\begin{cases}0 \text{ si } t<|r-r_*|;\\ \sin^{\frac{n-1}{2}-\omega}A\ P^{\omega-\frac{n-1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos A)\quad \text{si } |r-r_*|<t<r+r_*;\\ \dfrac{2}{\pi}\sinh^{\frac{n-1}{2}-\omega}\mathcal{A}\cos\pi\nu\ Q^{\omega-\frac{n-1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cosh\mathcal{A}) \text{ si } t>r+r_*;\end{cases}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{n}{2}-\omega)}t^{2(\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\omega}\\
&\times\begin{cases}0 \quad \text{si } t<|r-r_*|;\\ \displaystyle\int_0^A(\cos h-\cos A)^{\alpha-\omega}\cos\nu h\,dh\quad \text{si } |r-r_*|<t<r+r_*;\\ e^{i\pi(\omega-\frac{n-1}{2})}\displaystyle\int_{\mathcal{A}}^{+\infty}(\cosh h-\cosh\mathcal{A})^{\alpha-\omega}e^{-\nu h}\cos\pi\nu\,dh\quad \text{si } t>r+r_*;\end{cases}
\end{aligned}$$

où

$$A=\arccos\frac{r^2+r_*^2-t^2}{2rr_*}\qquad \text{et}\qquad \mathcal{A}=\cosh^{-1}\frac{t^2-r^2-r_*^2}{2rr_*}. \tag{2.6}$$

3. Preuve du Théorème 1.2

Le but de cette section est de montrer le Théorème 1.2. On remarque que pour prouver le Théorème 1.2, il suffit de démontrer les deux propositions suivantes:

Proposition 3.1. *Soient $t>0$ et $\frac{3}{2}<\epsilon<2$ fixés et*

$$\begin{aligned}
&T_{\omega,t}((r,x),(r_*,x_*))\\
&\overset{\text{déf}}{=} t^{2(\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\omega}\int_{\mathcal{A}}^{+\infty}(\cosh h-\cosh\mathcal{A})^{\alpha-\omega}[e^{-\nu h}\cos\pi\nu](x,\,x_*)\,dh\\
&\times 1_{\{((r,x),(r_*,x_*))\in C(N)\times C(N);\ t>r+r_*\}},
\end{aligned}\tag{3.1}$$

où $\mathcal{A}$ est défini par (2.6), et $\omega=(-1+\epsilon)+s[1-\epsilon+\frac{n+1}{2}]\,i$ avec $s\in\mathbb{R}$. Définissons
(3.2)
$$T_{\omega,t}g(r,x)=\int_{C(N)}T_{\omega,t}((r,x),(r_*,x_*))g(r_*,x_*)d\mu(r_*,x_*),\quad \forall(r,x)\in C(N),$$
pour toute $g\in C_0^\infty(C(N))$.

Alors, il existe une constante $C(\epsilon)>0$ telle que pour tout $1\le p\le+\infty$ fixé, on a

$$\|T_{\omega,t}g\|_p\le C(\epsilon)\|g\|_p,\quad \forall g\in L^p(C(N)). \tag{3.3}$$

Proposition 3.2. *Soient $t > 0$ et $\frac{3}{2} < \epsilon < 2$ fixés et*

$$\begin{aligned} S_{\omega,t}((r,x),(r_*,x_*)) &\overset{\text{déf}}{=} t^{2(\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\omega}\int_0^A (\cosh h-\cos A)^{\alpha-\omega}\cos h\nu\,(x,\,x_*)\,dh \\ &\quad\times 1_{\{((r,x),(r_*,x_*))\in C(N)\times C(N);\ |r-r_*|<t<r+r_*\}}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

où A est défini par (2.6), *$\omega = (-1+\epsilon) + s[1-\epsilon+\frac{n+1}{2}]\,i$ avec $s \in \mathbb{R}$. Définissons*

$$S_{\omega,t}g(r,x) = \int_{C(N)} S_{\omega,t}((r,x),(r_*,x_*))g(r_*,x_*)d\mu(r_*,x_*), \quad \forall (r,x) \in C(N), \tag{3.5}$$

pour toute $g \in C_0^\infty(C(N))$.

Alors, il existe une constante $C(\epsilon) > 0$ telle que pour tout $1 \le p \le +\infty$ fixé, on a

$$\|S_{\omega,t}g\|_p \le C(\epsilon)\|g\|_p, \quad \forall g \in L^p(C(N)). \tag{3.6}$$

Cette section est organisée de la façon suivante. A la section 3.1, on prouve la Proposition 3.1. A la section 3.2, on prouve la Proposition 3.2.

3.1. **Preuve de la Proposition 3.1.** Dans cette section, on montre la Proposition 3.1. Nous donnons les 2 lemmes suivants avant de commencer la preuve de la Proposition 3.1.

Lemme 3.1. *Soit $H(x,\,x_*)$ le noyau de l'opérateur $e^{-h\nu}\cos\pi\nu$. On note*

$$\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_* = \sup_{x\in N}\int_N |H((x,\,x_*))|\,d\mu_N(x_*) \tag{3.7}$$

et

$$\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|^* = \sup_{x_*\in N}\int_N |H((x,\,x_*))|\,d\mu_N(x). \tag{3.8}$$

Alors, il existe deux constante C, $C_* > 0$ telle que

$$\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_* + \|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|^* \le 2Ce^{-h\alpha}[1+h^{\frac{1-n}{2}}] \le 2C_*e^{-\alpha h}[1+h^{1-n}], \tag{3.9}$$

pour tout $h > 0$.

Démonstration. D'après le développement des spectres, on a

$$H(x,\,x_*) = \sum_{j=0}^{+\infty}\cos(\pi\sqrt{\lambda_j+\alpha^2})\ e^{-h\sqrt{\lambda_j+\alpha^2}}\phi_j(x)\phi_j(x_*),$$

où $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$ est la suite des valeurs propres de $-\Delta_N$ rangées dans l'ordre croissant chacune étant comptée un nombre de fois égal à la multiplicité, et ϕ_j est une fonction propre normalisé correspondante à λ_j (c'est-à-dire, $-\Delta\,\phi_j = \lambda_j\,\phi_j$, $\phi_j \in C^\infty(N)$ et $\int_N \phi_j^2 = 1$) de telle sorte que les fonctions ϕ_j constituent une base hilbertienne de $L^2(N)$.

En remarque que $H(x,\,x_*) = H(x_*,\,x)$ et que N est compacte, pour montrer ce lemme, il nous reste à prouver la formule suivante:

$$\sup_{x\in N}\int_N |H(x,\,x_*)|^2\,d\mu_N(x_*) < \Big\{C\cdot e^{-h\alpha}[1+h^{\frac{1-n}{2}}]\Big\}^2.$$

Or, on sait que

$$\begin{aligned}
\int_N |H(x, x_*)|^2 \, d\mu_N(x_*) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \cos^2 (\pi\sqrt{\lambda_j+\alpha^2}) \; e^{-2h\sqrt{\lambda_j+\alpha^2}} \phi_j^2(x) \\
&\leq e^{-\alpha h} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-h\sqrt{\lambda_j+\alpha^2}} \phi_j^2(x) \\
&= e^{-\alpha h} \cdot e^{-h\sqrt{-\Delta+\alpha^2}}(x, x) \\
&\leq C \cdot e^{-2h\alpha}[1 + h^{-(n-1)}],
\end{aligned}$$

d'où le Lemme 3.1. □

Lemme 3.2. *Soient* $\frac{3}{2} < \epsilon < 2$ *fixé et* $\omega = (-1+\epsilon) + s[1-\epsilon+\frac{n+1}{2}]\, i$ *avec* $s \in \mathbb{R}$. *Alors, il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{A}}^{+\infty} [\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_* + \|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|^*] \cdot |(\cosh h - \cosh\mathcal{A})^{\alpha-\omega}| dh \\
(3.10) \quad &\leq \quad C \cdot (\cosh\mathcal{A} - 1)^{-\Re\,\omega},
\end{aligned}$$

pour tout $\mathcal{A} > 0$, *où* $\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_*$ *et* $\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|^*$ *sont respectivement données par* (3.7) *et* (3.8).

Démonstration. 1) Nous supposons d'abord que $\mathcal{A} \geq 1$; alors, d'après le Lemme 3.1, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{A}}^{+\infty} [\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_* + \|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|^*] \cdot |(\cosh h - \cosh\mathcal{A})^{\alpha-\omega}| dh \\
\leq\; & C \int_{\mathcal{A}}^{+\infty} e^{-h\alpha}(\cosh h - \cosh\mathcal{A})^{\alpha-\Re\,\omega} dh \\
=\; & C \int_{\mathcal{A}}^{+\infty} e^{-h\alpha}(\cosh h - \cosh\mathcal{A})^{\frac{n}{2}-\epsilon} dh \\
=\; & C(\frac{\pi}{2})^{-\frac{1}{2}} e^{-i\pi(\epsilon-\frac{n+1}{2})}\Gamma(\frac{n+2}{2}-\epsilon)(\sinh\mathcal{A})^{\frac{n+1}{2}-\epsilon} Q_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\epsilon-\frac{n+1}{2}}(\cosh\mathcal{A}) \quad \text{par (2.4)} \\
\leq\; & C_*\Gamma(\frac{n+2}{2}-\epsilon)(\sinh\mathcal{A})^{\frac{n+1}{2}-\epsilon} \cdot \pi^{\frac{1}{2}} 2^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\Gamma(\alpha-\frac{1}{2}+\epsilon-\frac{n+1}{2}+1) \\
& \times (\cosh\mathcal{A})^{-(\alpha-\frac{1}{2})-1} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2}+\alpha-\frac{1}{2})} \qquad \text{voir [8] (p. 197)} \\
\leq\; & C \cdot (\sinh\mathcal{A})^{\frac{n+1}{2}-\epsilon}(\cosh\mathcal{A})^{-\frac{n-1}{2}} \\
\leq\; & C \cdot (\cosh\mathcal{A})^{\frac{n+1}{2}-\epsilon}(\cosh\mathcal{A})^{-\frac{n-1}{2}} \quad \text{car } \frac{3}{2} < \epsilon < 2 \text{ et } n \geq 3 \\
\leq\; & C_* \cdot (\cosh\mathcal{A} - 1)^{1-\epsilon} \quad \text{car } \mathcal{A} \geq 1 \\
=\; & C_* \cdot (\cosh\mathcal{A} - 1)^{-\Re\,\omega}.
\end{aligned}$$

2) Maintenant, nous supposons que $0 < \mathcal{A} < 1$. Nous remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{A}}^{+\infty} [\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_* + \|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|^*]\cdot|(\cosh h - \cosh\mathcal{A})^{\alpha-\omega}|dh \\
= \quad & \int_{\mathcal{A}}^{2\mathcal{A}} [\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_* + \|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|^*]\cdot(\cosh h - \cosh\mathcal{A})^{\frac{n}{2}-\epsilon}dh \\
+ \quad & \int_{2\mathcal{A}}^{1+\mathcal{A}} [\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_* + \|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|^*]\cdot(\cosh h - \cosh\mathcal{A})^{\frac{n}{2}-\epsilon}dh \\
+ \quad & \int_{1+\mathcal{A}}^{+\infty} [\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_* + \|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|^*]\cdot(\cosh h - \cosh\mathcal{A})^{\frac{n}{2}-\epsilon}dh.
\end{aligned}$$

Mais, d'après (3.9), on a

$$\begin{aligned}
&\int_{1+\mathcal{A}}^{+\infty} [\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_* + \|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|^*]\cdot(\cosh h - \cosh\mathcal{A})^{\frac{n}{2}-\epsilon}dh \\
\leq \quad & C_* \int_{1+\mathcal{A}}^{+\infty} e^{-\alpha h}\cdot(\cosh h - \cosh\mathcal{A})^{\frac{n}{2}-\epsilon}dh \\
= \quad & C_* e^{-\alpha\mathcal{A}} \int_1^{+\infty} e^{-\alpha s}\Big(\cosh(\mathcal{A}+s) - \cosh\mathcal{A}\Big)^{\frac{n}{2}-\epsilon}ds \\
& \text{par le changement de variable } s = h - \mathcal{A} \\
= \quad & C_* e^{-\alpha\mathcal{A}} \int_1^{+\infty} e^{-\alpha s}\cdot[(\cosh s - 1)\cosh\mathcal{A} + \sinh\mathcal{A}\sinh s]^{\frac{n}{2}-\epsilon}ds \\
\leq \quad & C \int_1^{+\infty} e^{-\alpha s}\cdot[(\cosh s - 1)\cosh\mathcal{A}]^{\frac{n}{2}-\epsilon}\,ds \\
& \text{car } \sinh\mathcal{A}\sinh s < 5(\cosh s - 1)\cosh\mathcal{A},\ \forall s \geq 1 \\
\leq \quad & C_* \int_1^{+\infty} e^{-\alpha s}\cdot e^{(\frac{n}{2}-\epsilon)s}ds \qquad \text{car } 0 < \mathcal{A} < 1 \text{ et } \cosh s - 1 \sim e^s \text{ quand } s \geq 1 \\
\leq \quad & C_* \frac{1}{\epsilon - 1}, \qquad \text{car } (\frac{n}{2} - \epsilon) - \alpha = 1 - \epsilon < 0.
\end{aligned}$$

De plus, quand $0 < \mathcal{A} \leq 1$, on remarque que

$$\mathcal{A}^2 \sim 4\sinh^2\tfrac{\mathcal{A}}{2} = 2(\cosh\mathcal{A} - 1),$$

$$\sinh\tfrac{h+\mathcal{A}}{2} \sim \tfrac{h+\mathcal{A}}{2} \sim h, \quad \sinh\tfrac{h-\mathcal{A}}{2} \sim \tfrac{h-\mathcal{A}}{2} \sim h \text{ quand } 2\mathcal{A} \leq h \leq 1 + \mathcal{A},$$

$$\sinh\tfrac{h+\mathcal{A}}{2} \sim \tfrac{h+\mathcal{A}}{2} \sim \mathcal{A}, \quad \sinh\tfrac{h-\mathcal{A}}{2} \sim \tfrac{h-\mathcal{A}}{2} \text{ quand } \mathcal{A} \leq h \leq 2\mathcal{A}.$$

Donc, d'après (3.9), on a

$$\begin{aligned}
&\int_{2\mathcal{A}}^{1+\mathcal{A}} [\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_* + \|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|^*] \cdot (\cosh h - \cosh\mathcal{A})^{\frac{n}{2}-\epsilon} dh \\
\leq\;& C\int_{2\mathcal{A}}^{1+\mathcal{A}} h^{1-n}(2\sinh\frac{h+\mathcal{A}}{2}\cdot\sinh\frac{h-\mathcal{A}}{2})^{\frac{n}{2}-\epsilon} dh \\
\leq\;& C^*\int_{2\mathcal{A}}^{1+\mathcal{A}} h^{1-n}\cdot(h^2)^{\frac{n}{2}-\epsilon}\, dh \\
\leq\;& C_*\frac{1}{\epsilon-1}\mathcal{A}^{2(1-\epsilon)} \qquad \text{car } \frac{3}{2}<\epsilon<2 \\
\leq\;& C\cdot(\cosh\mathcal{A}-1)^{1-\epsilon} \\
=\;& C\cdot(\cosh\mathcal{A}-1)^{-\Re\,\omega},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{A}}^{2\mathcal{A}} [\|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_* + \|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|^*] \cdot (\cosh h - \cosh\mathcal{A})^{\frac{n}{2}-\epsilon} dh \\
\leq\;& C\int_{\mathcal{A}}^{2\mathcal{A}} h^{1-n}(2\sinh\frac{h+\mathcal{A}}{2}\cdot\sinh\frac{h-\mathcal{A}}{2})^{\frac{n}{2}-\epsilon} dh \\
\leq\;& C^*\mathcal{A}^{1-n}\mathcal{A}^{\frac{n}{2}-\epsilon}\int_{\mathcal{A}}^{2\mathcal{A}} (h-\mathcal{A})^{\frac{n}{2}-\epsilon} dh \\
=\;& C^*\cdot\frac{1}{\frac{n}{2}-\epsilon+1}\cdot\mathcal{A}^{2(1-\epsilon)} \\
\leq\;& C_*\cdot(\cosh\mathcal{A}-1)^{-\Re\,\omega},
\end{aligned}$$

d'où le Lemme 3.2. □

Maintenant, nous donnons la démonstration de la Proposition 3.1.

Pour prouver la Proposition 3.1, d'après le théorème de convexité de Riesz, il suffit de montrer que pour $\frac{3}{2}<\epsilon<2$ fixé, il existe une constante $C(\epsilon)>0$ telle que

$$\sup_{(r,\,x)\in C(N)}\int_{C(N)} |T_{\omega,t}((r,\,x),(r_*,\,x_*))|\, d\mu(r_*,\,x_*) < C(\epsilon), \quad \forall t>0,$$
$$\sup_{(r_*,\,x_*)\in C(N)}\int_{C(N)} |T_{\omega,t}((r,\,x),(r_*,\,x_*))|\, d\mu(r,\,x) < C(\epsilon), \quad \forall t>0,$$

où $\omega=(-1+\epsilon)+s[(1-\epsilon)+\frac{n+1}{2}]\, i$ avec $s\in\mathbb{R}$, et $T_{\omega,t}((r,\,x),(r_*,\,x_*))$ donné par (3.1).

On remarque que $T_{\omega,t}((r,\,x),(r_*,\,x_*)) = T_{\omega,t}((r_*,\,x_*),(r,\,x))$. Donc, il nous reste à démontrer que

$$\sup_{(r,\,x)\in C(N)}\int_{N} |T_{\omega,t}((r,\,x),(r_*,\,x_*))|\, d\mu(r_*,\,x_*) < C(\epsilon), \quad \forall t>0.$$

En effet, pour tout $(r,\, x) \in C(N)$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \int_{C(N)} |T_{\omega,t}((r,\, x),(r_*,\, x_*))|\, d\mu(r_*,\, x_*) \\
= & \int_{\mathbb{R}^+} \left\{ \int_N \left| t^{2(\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\omega} \int_{\mathcal{A}}^{+\infty} (e^{-h\nu}\cos \pi\nu)(x,\, x_*)(\cosh h - \cosh \mathcal{A})^{\alpha-\omega}\, dh \right| \right. \\
& \left. \times 1_{t>r+r_*}\, d\mu_N(x_*) \right\} r_*^{n-1}\, dr_* \\
\leq & \int_{\mathbb{R}^+} t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\Re\,\omega}[\int_{\mathcal{A}}^{+\infty} \|e^{-h\nu}\cos\pi\nu\|_*(\cosh h - \cosh \mathcal{A})^{\alpha-\Re\,\omega}\, dh] \\
& \cdot 1_{\{t>r+r_*\}} r_*^{n-1}\, dr_* \\
\leq & \; C\int_{\mathbb{R}^+} t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\Re\,\omega}\cdot(\cosh\mathcal{A}-1)^{-\Re\,\omega}\cdot 1_{\{t>r+r_*\}} r_*^{n-1}\, dr_* \\
= & \; C^*(\epsilon)\int_{\mathbb{R}^+} t^{2(-1+\epsilon-\frac{n}{2})}[t^2-(r+r_*)^2]^{1-\epsilon}\cdot 1_{\{t>r+r_*\}} r_*^{n-1}\, dr_*.
\end{aligned}$$

Or, quand $\frac{3}{2} < \epsilon < 2$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^+} t^{2(-1+\epsilon-\frac{n}{2})}[t^2-(r+r_*)^2]^{1-\epsilon}\cdot 1_{\{t>r+r_*\}} r_*^{n-1}\, dr_* \\
= & \; t^{2(-1+\epsilon-\frac{n}{2})}\int_0^{t-r} r_*^{n-1}[t+(r+r_*)]^{1-\epsilon}[t-(r+r_*)]^{1-\epsilon}\, dr_* \\
< & \; t^{2(-1+\epsilon-\frac{n}{2})}\cdot t^{n-1}\cdot t^{1-\epsilon}\int_0^{t-r}[t-(r+r_*)]^{1-\epsilon}\, dr_* \\
< & \; \frac{1}{2-\epsilon}.
\end{aligned}$$

On a donc démontré la Proposition 3.1. $\square$

3.2. **Preuve de la Proposition 3.2.** Dans cette section, nous voulons montrer la Proposition 3.2; pour ceci, nous estimons tout d'abord le noyau de l'opérateur $S_{\omega,t}$ en utilisant quelques résultats connus sur la paramétrice de l'équation d'ondes.

Or N est une variété riemannienne compacte de dimension $n-1$, sans bord, connexe et son rayon d'injectivité $\rho > \pi$; alors, pour tout $0 < h \leq \pi$, nous pouvons écrire

(3.11)
$$\cos h\nu(x,\, x_*) = \sum_{j=0}^{M} U_j(x,\, x_*)h\frac{\left(h^2-d_N^2(x,\, x_*)\right)_+^{j-m}}{\Gamma(j-m+1)}\Bigg|_{m=\frac{(n-1)+1}{2}} + hC_M(h,\, x,\, x_*),$$

avec $U_j(x,\, x_*) \in C^\infty(N\times N)$ et $\frac{(h^2-d_N^2(x,x_*))_+^{j-m}}{\Gamma(j-m+1)}\Big|_{m=\frac{n}{2}}$ a le sens de §3.4 de [5]; de plus, on choisit M assez grand tel que $C_M(h,\, x,\, x_*) \in C([0,\, \pi]\times N\times N)$. Nous savons que

1. $C_M(h,\, x,\, x_*) = 0$ quand $d_N(x,\, x_*) > h$.

2. Quand $t \in (0,\, \rho)$, $\frac{(h^2-d_N^2(x,\, x_*))_+^{j-m}}{\Gamma(j-m+1)}\Big|_{m=\frac{n}{2}}$ ($j \in \mathbb{N}$) est une C^∞ fonction de t avec valeurs dans $\mathcal{D}'(N)$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a de plus

(3.12)

$$\frac{\partial}{\partial h}\frac{(h^2-d_N^2(x,\, x_*))_+^{j-m}}{\Gamma(j-m+1)}\Big|_{m=\frac{n}{2}} = 2h\frac{(h^2-d_N^2(x,\, x_*))_+^{j-m-1}}{\Gamma(j-m)}\Big|_{m=\frac{n}{2}}, \forall t \in (0,\, \rho);$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{(h^2-d_N^2(x,\, x_*))_+^{j-m}}{\Gamma(j-m+1)}\Big|_{m=\frac{n}{2}} = 0. \tag{3.13}$$

Ces résultats se trouvent dans [2] (pp. 255-258), [3] (p. 5) ou [6] (§17.4).

On injecte la formule (3.11) dans la formule (3.4). On note

$$\begin{aligned} K_{\text{rest}}((r,x),(r_*,x_*)) \quad = \quad & t^{2(\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\omega}\int_0^A(\cos h-\cos A)^{\alpha-\omega}hC_M(h,\, x,\, x_*)\,dh \\ & \times 1_{\{r,\, r_*>0;\, |r-r_*|<t<r+r_*\}}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

où A défini par (2.6).

Alors, quand $n \geq 3$ et $\Re\,\omega = -1+\epsilon \in (\frac{1}{2},\, 1)$, nous avons

$$\begin{aligned} & \Big|K_{\text{rest}}\Big((r,\, x),(r_*,\, x_*)\Big)\Big| \\ \leq\;& C\cdot t^{2(-1+\epsilon-\frac{n}{2})}(rr_*)^{1-\epsilon}\int_{d_N(x,\, x_*)}^A(\cos h-\cos A)^{\frac{n-2}{2}-(-1+\epsilon)}h\,dh \\ & \times 1_{\{r,\, r_*>0;\ |r-r_*|<t<r+r_*\}}\cdot 1_{d_N(x,\, x_*)<A} \\ \leq\;& C_*(\epsilon)1_{\{r,\, r_*>0;\ |r-r_*|<t<r+r_*\}}t^{2(-1+\epsilon-\frac{n}{2})}(rr_*)^{1-\epsilon}\cdot 1_{d_N(x,\, x_*)<A}; \end{aligned} \tag{3.15}$$

parce que pour $\beta > -\frac{1}{2}$ fixé, il existe une constante $C(\beta) > 0$ telle que

$$\int_a^b(\cos h-\cos b)^{-\beta}h\,dh \leq C(\beta), \quad \forall\ 0 \leq a \leq b \leq \pi.$$

Il suffit donc d'estimer le terme

$$\begin{aligned} & S^1_{\omega,t}((r,\, x),(r_*,\, x_*)) \\ & = t^{2(\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\omega}\int_0^A(\cos h-\cos A)^{\alpha-\omega}h\frac{(h^2-d_N^2(x,\, x_*))_+^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+1)}\,dh \\ & \quad \times 1_{\{(r,\, x),(r_*,\, x_*)\in C(N);\, |r-r_*|<t<r+r_*\}}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

où A défini par (2.6).

Pour démontrer la Proposition 3.2, on simplifie d'abord la formule suivante:

$$\int_0^A(\cos h-\cos A)^{\alpha-\omega}h\frac{(h^2-d_N^2(x,\, x_*))_+^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+1)}\,dh.$$

En effet, quand $\Re\,\omega = -1+\epsilon \in (\frac{1}{2},\, 1)$, d'après les formules (3.12) et (3.13), on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^A (\cos h - \cos A)^{\alpha-\omega} h \frac{(h^2 - d_N^2(x,\, x_*))_+^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+1)}\, dh \\
= &\int_0^A (\cos h - \cos A)^{\alpha-\omega}\, d\Big[\frac{1}{2}\frac{(h^2 - d_N^2(x,\, x_*))_+^{1-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+1)(-\frac{n}{2}+1)}\Big] \\
= &\int_0^A [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})(\cos h - \cos A)^{\alpha-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x,\, x_*))_+^{1-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+2)}\, dh \\
= &\cdots\cdots \\
= &\int_0^A [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{q-1}(\cos h - \cos A)^{\alpha-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x,\, x_*))_+^{(q-1)-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+q)}\, dh \\
= &\int_0^A [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{[\alpha-\Re\,\omega]}(\cos h - \cos A)^{\alpha-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x,\, x_*))_+^{([\alpha-\Re\,\omega])-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+[\alpha-\Re\,\omega]+1)}\, dh \\
= &\int_0^A [(\frac{-1}{2h}\frac{d}{dh})^{[\alpha-\Re\,\omega]+1}(\cos h - \cos A)^{\alpha-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x,\, x_*))_+^{([\alpha-\Re\,\omega]+1)-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+[\alpha-\Re\,\omega]+2)}\, dh \\
= &\int_0^A [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{[\frac{n}{2}-\Re\,\omega]}(\cos h - \cos A)^{\alpha-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x,\, x_*))_+^{[\frac{n}{2}-\Re\,\omega]-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+[\frac{n}{2}-\Re\,\omega]+1)}\, dh,
\end{aligned}$$

où $[x]$ (avec $x \in \mathbb{R}$) represent la partie entière de x.

(A) On suppose d'abord que $n = 2k$ avec $k \geq 2$; alors, on sait bien que

$$h\frac{(h^2 - d_N^2(x,\, x_*))_+^{([\frac{n}{2}-\Re\,\omega])-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+[\frac{n}{2}-\Re\,\omega]+1)} = h\frac{(h^2 - d_N^2(x,\, x_*))_+^{-1}}{\Gamma(0)} = \frac{1}{2}\delta(h - d_N(x,\, x_*)).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_0^A (\cos h - \cos A)^{\alpha-\omega} h \frac{(h^2 - d_N^2(x,\, x_*))_+^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+1)}\, dh \\
= &\int_0^A [\frac{1}{2}(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h - \cos A)^{k-1-\omega}]\delta(h - d_N(x,\, x_*))dh \cdot 1_{d_N(x,x_*)<A} \\
= &\frac{1}{2}(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h - \cos A)^{k-1-\omega}\Big|_{h=d_N(x,x_*)} \cdot 1_{d_N(x,x_*)<A}.
\end{aligned}$$

Donc, on a le résultat suivant:

Lemme 3.3. *Soient $S^1_{\omega,t}$ donné par* (3.16) *où $\Re\,\omega = -1+\epsilon \in (\frac{1}{2},\, 1)$; alors, quand $n = 2k$ avec $k \geq 2$, nous avons l'estimation suivante:*

$$\begin{aligned}
|S^1_{\omega,t}((r,\, x),(r_*,\, x_*))| \;\leq\;& t^{2(-1+\epsilon-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-(-1+\epsilon)} \cdot 1_{\{r,\,r_*>0;\,|r-r_*|<t<r+r_*\}} \\
&\times \Big|(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}\Big|_{h=d_N(x,x_*)}(\cos h - \cos A)^{k-1-\omega}\Big| \\
\leq\;& C(k,\,\epsilon)\cdot t^{2(-1+\epsilon-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-(-1+\epsilon)} \cdot 1_{\{r,\,r_*>0;\,|r-r_*|<t<r+r_*\}} \\
&\times (\cos d_N(x,\, x_*) - \cos A)^{-(-1+\epsilon)} \cdot 1_{d_N(x,x_*)<A}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

(B) On suppose maintenant que $n = 2k+1$ avec $k \geq 1$.

Quand $\Re\omega = -1+\epsilon \in (\frac{1}{2}, 1)$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^A (\cos h - \cos A)^{\alpha-\omega} h \frac{(h^2 - d_N^2(x, x_*))_+^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+1)}\, dh \\
=\ & \int_0^A [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{[\frac{n}{2}-\Re\omega]}(\cos h - \cos A)^{\alpha-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x, x_*))_+^{[\frac{n}{2}-\Re\omega]-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+[\frac{n}{2}-\Re\omega]+1)}\, dh \\
=\ & \int_0^A [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h - \cos A)^{k-\frac{1}{2}-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x, x_*))_+^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\, dh \\
=\ & \int_{d_N(x, x_*)}^A [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h - \cos A)^{k-\frac{1}{2}-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x, x_*))_+^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\, dh \\
(3.18)\quad & \times 1_{d_N(x,\ x_*)<A}.
\end{aligned}$$

Il nous reste donc à estimer

$$\int_{d_N(x, x_*)}^A [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h - \cos A)^{k-\frac{1}{2}-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x, x_*))_+^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\, dh, \tag{3.19}$$

où $0 \le d_N(x, x_*) < A < \pi$.

On remarque que

$$\begin{aligned}
&\int_{d_N(x, x_*)}^A [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h - \cos A)^{k-\frac{1}{2}-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x, x_*))_+^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\, dh \\
&= \int_{d_N(x, x_*)}^{\frac{A+d_N(x, x_*)}{2}} [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h - \cos A)^{k-\frac{1}{2}-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x, x_*))_+^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\, dh \\
(3.20)\quad & \\
&+ \int_{\frac{A+d_N(x, x_*)}{2}}^A [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h - \cos A)^{k-\frac{1}{2}-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x, x_*))_+^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\, dh.
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\frac{A+d_N(x, x_*)}{2}}^A [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h - \cos A)^{k-\frac{1}{2}-\omega}] h \frac{(h^2 - d_N^2(x, x_*))_+^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\, dh \right| \\
\le\ & C \int_{\frac{A+d_N(x, x_*)}{2}}^A \left| [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h - \cos A)^{k-\frac{1}{2}-\omega}] h (h^2 - d_N^2(x, x_*))_+^{-\frac{3}{2}} \right| dh \\
\le\ & C_* \int_{\frac{A+d_N(x, x_*)}{2}}^A (\cos h - \cos A)^{\frac{1}{2}-\Re\omega} h (h^2 - d_N^2(x, x_*))_+^{-\frac{3}{2}}\, dh \\
\le\ & C \cdot (A + d_N(x, x_*))(A^2 - d_N^2(x, x_*))^{-\frac{3}{2}} \\
& \times \int_{\frac{A+d_N(x, x_*)}{2}}^A (2\sin\frac{A-h}{2}\cdot \sin\frac{A+h}{2})^{\frac{1}{2}-\Re\omega}\, dh \\
\le\ & C_* \cdot (A + d_N(x, x_*))^{-\frac{1}{2}}(A - d_N(x, x_*))^{-\frac{3}{2}} \\
& \times \int_{\frac{A+d_N(x, x_*)}{2}}^A ((A-h)\cdot \sin\frac{A+h}{2})^{\frac{1}{2}-\Re\omega}\, dh.
\end{aligned}$$

1. Soit $0 < A < \frac{\pi}{2}$; alors, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}^{A} \Big((A-h)\cdot \sin\frac{A+h}{2}\Big)^{\frac12-\Re\omega}\,dh\\
\leq\ & C\int_{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}^{A} \Big((A-h)\cdot (A+h)\Big)^{\frac12-\Re\omega}\,dh\\
\leq\ & C_*\cdot (A+d_N(x,\,x_*))^{\frac12-\Re\omega}\int_{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}^{A} (A-h)^{\frac12-\Re\omega}\,dh\\
\leq\ & C^*\cdot (A+d_N(x,\,x_*))^{\frac12-\Re\omega}(A-d_N(x,\,x_*))^{\frac32-\Re\omega}.
\end{aligned}$$

2. Soit $\frac{\pi}{2} \leq A < \pi$; alors, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}^{A} \Big((A-h)\cdot \sin\frac{A+h}{2}\Big)^{\frac12-\Re\omega}\,dh\\
\leq\ & C\int_{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}^{A} \Big((A-h)\cdot (\pi-\frac{A+h}{2})\Big)^{\frac12-\Re\omega}\,dh\\
\leq\ & C\cdot (\pi-A)^{\frac12-\Re\omega}\int_{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}^{A} (A-h)^{\frac12-\Re\omega}\,dh\\
\leq\ & C^*\cdot (\pi-A)^{\frac12-\Re\omega}(A-d_N(x,\,x_*))^{\frac32-\Re\omega}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons le résultat suivant:

Lemme 3.4. *Quand $n = 2k+1$ avec $k \geq 1$, on note*

(3.21)

$$\begin{aligned}
&S^{1,\,1}_{\omega,t}((r,\,x),(r_*,\,x_*))\\
&\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}^{A} [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h-\cos A)^{k-\frac12-\omega}]h\frac{(h^2-d_N^2(x,\,x_*))_+^{-\frac32}}{\Gamma(-\frac12)}\,dh\\
&\quad\times t^{2(\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\omega}\cdot 1_{\{(r,\,x),(r_*,\,x_*)\in C(N);\,|r-r_*|<t<r+r_*\}},
\end{aligned}$$

avec A défini par (2.6) et $\Re\omega = -1+\epsilon \in (\frac12,\,1)$.

Alors, nous avons l'estimation suivante:

$$\begin{aligned}
&|S^{1,\,1}_{\omega,t}((r,\,x),(r_*,\,x_*))|\\
\leq\ & C\cdot t^{2(\Re\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\Re\omega}\cdot 1_{\{(r,\,x),(r_*,\,x_*)\in C(N);\,|r-r_*|<t<r+r_*\}}\cdot 1_{d_N(x,\,x_*)<A}\\
&\times\begin{cases} (A^2-d_N^2(x,\,x_*))^{-\Re\omega} & \text{si}\quad 0<A<\frac{\pi}{2};\\ (\pi-A)^{\frac12-\Re\omega}(A-d_N(x,\,x_*))^{-\Re\omega} & \text{si}\quad \frac{\pi}{2}\leq A<\pi.\end{cases}
\end{aligned}\tag{3.22}$$

Maintenant, nous estimons l'intégrale de Riemann-Liouville suivant:

(3.23)

$$\begin{aligned}
&\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}} [(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h-\cos A)^{k-\frac12-\omega}]h\frac{(h^2-d_N^2(x,\,x_*))_+^{-\frac32}}{\Gamma(-\frac12)}\,dh\\
&=\frac{1}{\Gamma(-\frac12)}\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}} \Big\{[h(h+d_N(x,\,x_*))^{-\frac32}](-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h-\cos A)^{k-\frac12-\omega}\Big\}\\
&\qquad\times (h-d_N(x,\,x_*))_+^{-\frac32}\,dh,
\end{aligned}$$

car $(h^2-d_N^2(x,\, x_*))_+^{-\frac{3}{2}} = (h+d_N(x,\, x_*))^{-\frac{3}{2}}(h-d_N(x,\, x_*))_+^{-\frac{3}{2}}$ pour tout $0<t<\rho$, voir [5] (§3.2); et où on suppose que $0<d_N(x,\, x_*)<A<\pi$.

On note

$$f(h) = h(h+d_N(x,\, x_*))^{-\frac{3}{2}}(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h-\cos A)^{k-\frac{1}{2}-\omega}. \tag{3.24}$$

Alors, d'après les resultats dans [11] (p. 10), nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}} f(h)(h-d_N(x,\, x_*))_+^{-\frac{3}{2}}\, dh\\
= \;& \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} f\Big(\frac{A+d_N(x,\, x_*)}{2}\Big)\Big(\frac{A+d_N(x,\, x_*)}{2}-d_N(x,\, x_*)\Big)^{-\frac{1}{2}}\\
+ \;& \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}} f'(h)(h-d_N(x,\, x_*))_+^{-\frac{1}{2}}\, dh.
\end{aligned}$$

Pour $f(\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2})$, nous avons l'estimation suivante:

$$\begin{aligned}
&\Big|f(\frac{A+d_N(x,\, x_*)}{2})\Big|\\
\le\;& C\cdot(A+d_N(x,\, x_*))^{-\frac{1}{2}}\Big(\cos\frac{A+d_N(x,\, x_*)}{2}-\cos A\Big)^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}\\
=\;& C\cdot[A+d_N(x,\, x_*)]^{-\frac{1}{2}}\Big[2\sin\frac{A-d_N(x,\, x_*)}{2}\cdot\sin(\frac{A+\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}{2})\Big]^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}\\
\le\;& C_*\cdot(A+d_N(x,\, x_*))^{-\frac{1}{2}}\Big[A-d_N(x,\, x_*)\Big]^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}\\
&\times\begin{cases} [A+d_N(x,\, x_*)]^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega} & \text{si}\quad 0<A<\frac{\pi}{2};\\ (\pi-A)^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega} & \text{si}\quad \frac{\pi}{2}\le A<\pi.\end{cases}
\end{aligned}$$

Ensuite, on va estimer l'autre partie:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}} f'(h)(h-d_N(x,\, x_*))_+^{-\frac{1}{2}}\, dh.$$

Pour tout $0<d_N(x,\, x_*)\le h\le\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}$, on remarque que

$$\begin{aligned}
f'(h) \;=\;& \Big(h+d_N(x,\, x_*)\Big)^{-\frac{3}{2}}(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h-\cos A)^{k-\omega-\frac{1}{2}}\\
-\;& \frac{3}{2}h\Big(h+d_N(x,\, x_*)\Big)^{-\frac{5}{2}}(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h-\cos A)^{k-\omega-\frac{1}{2}}\\
+\;& h\Big(h+d_N(x,\, x_*)\Big)^{-\frac{3}{2}}\frac{d}{dh}\Big[(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h-\cos A)^{k-\omega-\frac{1}{2}}\Big].
\end{aligned}$$

Mais, pour tout $0<d_N(x,\, x_*)\le h\le\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}<A<\pi$ et tout $\Re\,\omega\in(\frac{1}{2},\, 1)$, on a

$$\Big|(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h-\cos A)^{k-\omega-\frac{1}{2}}\Big|\le C\cdot\Big(\cos h-\cos A\Big)^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}$$

et

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{d}{dh}\Big[(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h-\cos A)^{k-\omega-\frac{1}{2}}\Big]\Big| \\
\leq\ & C\cdot\Big[(\cos h-\cos A)^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}\sin h+(\cos h-\cos A)^{\frac{1}{2}-\Re\omega}\Big] \\
\leq\ & C\cdot\Big[(\cos h-\cos A)^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}h+(\cos h-\cos A)^{\frac{1}{2}-\Re\omega}\Big].
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $0<d_N(x,\,x_*)\leq h\leq\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}<A<\pi$ et tout $\Re\omega\in(\frac{1}{2},\,1)$, on a

$$|f'(h)|\leq C\cdot\Big[h^{\frac{1}{2}}(\cos h-\cos A)^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}+h^{-\frac{3}{2}}(\cos h-\cos A)^{\frac{1}{2}-\Re\omega}\Big].$$

On en déduit que pour tout $0<d_N(x,\,x_*)\leq h\leq\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}<A<\pi$ et tout $\Re\omega\in(\frac{1}{2},\,1)$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}f'(h)(h-d_N(x,\,x_*))_+^{-\frac{1}{2}}\,dh\Big| \\
\leq\ & C\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}\Big[h^{\frac{1}{2}}(\cos h-\cos A)^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}+h^{-\frac{3}{2}}(\cos h-\cos A)^{\frac{1}{2}-\Re\omega}\Big] \\
&\qquad\times(h-d_N(x,\,x_*))^{-\frac{1}{2}}\,dh.
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
&\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}h^{\frac{1}{2}}(\cos h-\cos A)^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}(h-d_N(x,\,x_*))^{-\frac{1}{2}}\,dh \\
=\ & \int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}h^{\frac{1}{2}}(2\sin\frac{A-h}{2}\cdot\sin\frac{A+h}{2})^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}(h-d_N(x,\,x_*))^{-\frac{1}{2}}\,dh \\
\leq\ & C\cdot[A+d_N(x,\,x_*)]^{\frac{1}{2}}\cdot[A-d_N(x,\,x_*)]^{-\frac{1}{2}-\Re\omega} \\
&\times\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}(\sin\frac{A+h}{2})^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}[h-d_N(x,\,x_*)]^{-\frac{1}{2}}\,dh.
\end{aligned}$$

(1) Quand $0<A<\frac{\pi}{2}$, on sait bien que

$$\begin{aligned}
&\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}(\sin\frac{A+h}{2})^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}[h-d_N(x,\,x_*)]^{-\frac{1}{2}}\,dh \\
\leq\ & C\cdot[A+d_N(x,\,x_*)]^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}[h-d_N(x,\,x_*)]^{-\frac{1}{2}}\,dh \\
=\ & C_*\cdot(A+d_N(x,\,x_*))^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}(A-d_N(x,\,x_*))^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

(2) Quand $\frac{\pi}{2}\leq A<\pi$, on sait bien que

$$\begin{aligned}
&\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}(\sin\frac{A+h}{2})^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}(h-d_N(x,\,x_*))^{-\frac{1}{2}}\,dh \\
\leq\ & C\cdot(\pi-A)^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}(h-d_N(x,\,x_*))^{-\frac{1}{2}}\,dh \\
=\ & C_*\cdot(\pi-A)^{-\frac{1}{2}-\Re\omega}(A-d_N(x,\,x_*))^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Comme ci-dessus, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}} h^{-\frac{3}{2}}(\cos h-\cos A)^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}(h-d_N(x,\,x_*))^{-\frac{1}{2}}\,dh\\
\leq\quad & C\cdot(A-d_N(x,\,x_*))^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}\\
&\times\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}} h^{-\frac{3}{2}}(\sin\frac{A+h}{2})^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}(h-d_N(x,\,x_*))^{-\frac{1}{2}}\,dh.
\end{aligned}$$

(i) Soit $0<A<\frac{\pi}{2}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}} h^{-\frac{3}{2}}(\sin\frac{A+h}{2})^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}(h-d_N(x,\,x_*))^{-\frac{1}{2}}\,dh\\
\leq\quad & C\cdot(A+d_N(x,\,x_*))^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}} h^{-\frac{3}{2}}(h-d_N(x,\,x_*))^{-\frac{1}{2}}\,dh\\
=\quad & C\cdot(A+d_N(x,\,x_*))^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}\int_0^{\frac{A-d_N(x,\,x_*)}{2}}(s+d_N(x,\,x_*))^{-\frac{3}{2}}s^{-\frac{1}{2}}\,ds\\
=\quad & C_*\cdot(A+d_N(x,\,x_*))^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}\frac{1}{d_N(x,\,x_*)}\int_0^{\frac{A-d_N(x,\,x_*)}{2d_N(x,\,x_*)}}(h+1)^{-\frac{3}{2}}h^{-\frac{1}{2}}\,dh\\
\leq\quad & C\cdot\frac{1}{d_N(x,\,x_*)}(A+d_N(x,\,x_*))^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}.
\end{aligned}$$

(ii) Soit $\frac{\pi}{2}\leq A<\pi$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}} h^{-\frac{3}{2}}(\sin\frac{A+h}{2})^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}(h-d_N(x,\,x_*))^{-\frac{1}{2}}\,dh\\
\leq\quad & C\cdot(\pi-A)^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}} h^{-\frac{3}{2}}(h-d_N(x,\,x_*))^{-\frac{1}{2}}\,dh\\
\leq\quad & C_*\cdot\frac{1}{d_N(x,\,x_*)}(\pi-A)^{\frac{1}{2}-\Re\,\omega}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a le résultat suivant:

Lemme 3.5. *Quand $n=2k+1$ avec $k\geq 1$, on note*

(3.25)
$$\begin{aligned}
&S^{1,\,2}_{\omega,t}((r,\,x),(r_*,\,x_*))\\
&\stackrel{\text{déf}}{=} t^{2(\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\omega}\times 1_{\{(r,\,x),(r_*,\,x_*)\in C(N);\,|r-r_*|<t<r+r_*\}}\\
&\times\int_{d_N(x,\,x_*)}^{\frac{A+d_N(x,\,x_*)}{2}}[(-\frac{1}{2h}\frac{d}{dh})^{k-1}(\cos h-\cos A)^{k-\frac{1}{2}-\omega}]h\frac{(h^2-d_N^2(x,\,x_*))_+^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\,dh,
\end{aligned}$$

avec A défini par (2.6) *et $\Re\,\omega=-1+\epsilon\in(\frac{1}{2},\,1)$.*

Alors, il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $(r,x),(r_*,x_*)\in C(N)$, on a

$$\begin{aligned}
&|S^{1,2}_{\omega,t}((r,\,x),(r_*,\,x_*))|\\
&\quad\le C\cdot t^{2(\Re\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\Re\omega}\cdot 1_{\{|r-r_*|<t<r+r_*\}}\cdot 1_{d_N(x,\,x_*)<A}\cdot(A-d_N(x,\,x_*))^{-\Re\omega}\\
&\quad\times\begin{cases}(A+d_N(x,\,x_*))^{-\Re\omega}\Big[1+\dfrac{(A^2-d_N^2(x,\,x_*))^{\frac12}}{d_N(x,\,x_*)}\Big] & si\ 0<A<\frac{\pi}{2};\\ (\pi-A)^{-\frac12-\Re\omega}\Big[1+\dfrac{(\pi-A)(A-d_N(x,\,x_*))^{\frac12}}{d_N(x,\,x_*)}\Big] & si\ \frac{\pi}{2}\le A<\pi.\end{cases}
\end{aligned}\tag{3.26}$$

On note

$$\begin{aligned}
K_1\Big((r,\,x),(r_*,\,x_*)\Big)&\overset{\text{déf}}{=}t^{2(\Re\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\Re\omega}\cdot 1_{\{(r,\,x),(r_*,x_*)\in C(N);\ |r-r_*|<t<r+r_*\}}\\
&\times\Big[(A^2-d_N^2(x,\,x_*))^{-\Re\omega}+\frac{1}{d_N(x,\,x_*)}(A^2-d_N^2(x,\,x_*))^{\frac12-\Re\omega}\Big]\\
&\times 1_{\{\cos A=\frac{r^2+r_*^2-t^2}{2rr_*}>0,\ 0<A<\frac{\pi}{2}\}}\cdot 1_{d_N(x,\,x_*)<A};
\end{aligned}\tag{3.27}$$

et

$$\begin{aligned}
K_2\Big((r,\,x),(r_*,\,x_*)\Big)&\overset{\text{déf}}{=}t^{2(\Re\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\Re\omega}\cdot 1_{\{(r,\,x),(r_*,x_*)\in C(N);\ |r-r_*|<t<r+r_*\}}\\
&\times\Big[(\pi-A)^{-\frac12-\Re\omega}(A-d_N(x,\,x_*))^{-\Re\omega}\\
&\qquad+(\pi-A)^{\frac12-\Re\omega}\frac{1}{d_N(x,\,x_*)}[A-d_N(x,\,x_*)]^{\frac12-\Re\omega}\Big]\\
&\times 1_{\{\cos A=\frac{r^2+r_*^2-t^2}{2rr_*}>0,\ \frac{\pi}{2}\le A<\pi\}}\cdot 1_{d_N(x,\,x_*)<A}.
\end{aligned}\tag{3.28}$$

On remarque que les deux inéqualités suivantes:

$$\cos a-\cos b\sim b^2-a^2,\quad\text{quand}\quad 0\le a\le b<\frac{\pi}{2};$$

et

$$\cos a-\cos b\ge C\cdot(b-a)\cdot(\pi-b),\quad\text{pour tout }0\le a\le b\text{ avec }\frac{\pi}{2}\le b<\pi.$$

Donc, d'après les Lemmes 3.3, 3.4, 3.5 et les formules (3.4), (3.11), (3.15), (3.18) et (3.20), on en déduit que

Proposition 3.3. *Soient $t>0$, $\omega\in\mathbb{C}$ avec $\Re\omega=-1+\epsilon$ où $\epsilon\in(\frac32,2)$ et $S_{\omega,t}$ défini par la formule (3.4). Soit K_1 (resp. K_2) défini par (3.27) (resp. (3.28)).*

Alors, il existe une constante $C>0$ telle que

$$S_{\omega,t}\Big((r,\,x),(r_*,\,x_*)\Big)\le C\cdot\Big(K_1+K_2\Big)\Big((r,\,x),(r_*,\,x_*)\Big),\tag{3.29}$$

pour tout $d_N(x,\,x_*)>0$.

Par conséquent, pour démontrer la Proposition 3.2, il nous reste à démontrer les deux lemmes suivants:

Lemme 3.6. *Soit $\omega \in \mathbb{C}$ avec $\Re\omega = -1+\epsilon$ où $\epsilon \in (\frac{3}{2}, 2)$. Alors, il existe une constante $C(\epsilon) > 0$ telle que*

$$\int_{C(N)} \left| K_1((r,\, x), (r_*,\, x_*)) \right| d\mu(r_*, x_*) < C(\epsilon), \quad \forall (r,\, x) \in C(N); \tag{3.30}$$

$$\int_{C(N)} \left| K_1((r,\, x), (r_*,\, x_*)) \right| d\mu(r, x) < C(\epsilon), \quad \forall (r_*,\, x_*) \in C(N). \tag{3.31}$$

Lemme 3.7. *Soit $\omega \in \mathbb{C}$ avec $\Re\omega = -1+\epsilon$ où $\epsilon \in (\frac{3}{2}, 2)$. Alors, il existe une constante $C(\epsilon) > 0$ telle que*

$$\int_{C(N)} \left| K_2((r,\, x), (r_*,\, x_*)) \right| d\mu(r_*, x_*) < C(\epsilon), \quad \forall (r,\, x) \in C(N); \tag{3.32}$$

$$\int_{C(N)} \left| K_2((r,\, x), (r_*,\, x_*)) \right| d\mu(r, x) < C(\epsilon), \quad \forall (r_*,\, x_*) \in C(N). \tag{3.33}$$

On donne d'abord la démonstration du Lemme 3.6.

En remarquant que

$$\int_{C(N)} \left| K_1((r,\, x), (r_*,\, x_*)) \right| d\mu(r_*, x_*) = \int_{C(N)} \left| K_1((r,\, x), (r_*,\, x_*)) \right| d\mu(r, x);$$

donc, pour prouver le Lemme 3.6, il suffit de montrer (3.30).

On remarque d'abord que

$$\begin{aligned} & \int_N \left\{ [A^2 - d_N^2(x,\, x_*)]^{-\Re\omega} + \frac{1}{d_N(x,\, x_*)} [A^2 - d_N^2(x,\, x_*)]^{\frac{1}{2}-\Re\omega} \right\} \\ & \qquad \cdot 1_{d_N(x,x_*)<A}\, d\mu_N(x_*) \\ \leq \;& C \int_0^A \left[(A^2-h^2)^{-\Re\omega} + \frac{1}{h}(A^2-h^2)^{\frac{1}{2}-\Re\omega} \right] h^{n-2} dh \\ = \;& C \cdot A^{n-1-2\Re\omega} \int_0^1 \left[(1-s^2)^{-\Re\omega} s^{n-2} + (1-s^2)^{\frac{1}{2}-\Re\omega} s^{n-3} \right] ds \\ = \;& C(n,\, \epsilon) \cdot A^{n-1-2\Re\omega}, \end{aligned}$$

car $n \geq 3$ et $\Re\omega \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Ensuite, d'après

$$2\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{r^2 + r_*^2 - t^2}{2rr_*} \text{ et } A \in (0,\, \frac{\pi}{2}),$$

on en déduit que

$$A^2 \sim \frac{t^2 - (r-r_*)^2}{2rr_*}.$$

Donc, d'après la définition de $K_1((r,\, x), (r_*,\, x_*))$ (voir (3.27)), pour montrer (3.30), il nous reste à démontrer qu'il existe une constante $C(\epsilon) > 0$ telle que pour tout $t > 0$ et tout $(r, x) \in C(N)$, on a

$$t^{2(\Re\omega - \frac{n}{2})} \int_{\{r,\, r_*>0;\ |r-r_*|<t<r+r_*\}} \left[\frac{t^2-(r-r_*)^2}{2rr_*} \right]^{\frac{n-1}{2}} \left[t^2 - (r-r_*)^2 \right]^{-\Re\omega} r_*^{n-1}\, dr_* < C(\epsilon).$$

En effet, on sait que

(1) Soit $r \geq t$; alors, on a

$$\begin{aligned}
& t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})} \int_{\{r,\, r_*>0;\ |r-r_*|<t<r+r_*\}} \Big[\frac{t^2-(r-r_*)^2}{2rr_*}\Big]^{\frac{n-1}{2}} \\
& \qquad \times \Big[t^2-(r-r_*)^2\Big]^{-\Re\,\omega} r_*^{n-1}\,dr_* \\
= \;& C\cdot t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})} \int_{\{r,\, r_*>0;\ |r-r_*|<t<r+r_*\}} \Big[t^2-(r-r_*)^2\Big]^{\frac{n-1}{2}-\Re\,\omega} (\frac{r_*}{r})^{\frac{n-1}{2}}\,dr_* \\
\leq \;& C_*\cdot t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})}\cdot (t^2)^{\frac{n-1}{2}-\Re\,\omega} r \int_{\{|\frac{r_*}{r}-1|<\frac{t}{r}<\frac{r_*}{r}+1\}} (\frac{r_*}{r})^{\frac{n-1}{2}} d(\frac{r_*}{r}) \\
& \text{car } n\geq 3 \text{ et } \Re\,\omega\in(\tfrac{1}{2},\,1) \\
= \;& C_*\cdot(\frac{t}{r})^{-1}\int_{1-\frac{t}{r}}^{1+\frac{t}{r}} h^{\frac{n-1}{2}}\,dh \\
\leq \;& C.
\end{aligned}$$

(2) Soit $r<t$; alors, on remarque d'abord que de $|r-r_*|<t<r+r_*$ et $r<t$, on a $r_*<2t$.

Donc, à cause de $n\geq 3$ et $\frac{r^2+r_*^2-t^2}{2rr_*}\in(0,\,1)$, on a

$$\begin{aligned}
& t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})}\Big[\frac{t^2-(r-r_*)^2}{2rr_*}\Big]^{\frac{n-1}{2}}\Big[t^2-(r-r_*)^2\Big]^{-\Re\,\omega} r_*^{n-1} \\
\leq \;& t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})} r_*^{n-1}\frac{t^2-(r-r_*)^2}{2rr_*}\Big[(t+|r-r_*|)(t-|r-r_*|)\Big]^{-\Re\,\omega} \\
\leq \;& C_*\cdot t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})}\cdot t^{(n-1)-1}\frac{1}{r}t^{1-\Re\,\omega}(t-|r-r_*|)^{1-\Re\,\omega} \\
= \;& C_*\cdot(\frac{t}{r})^{\Re\,\omega-1}\frac{1}{r}(\frac{t-|r-r_*|}{r})^{1-\Re\,\omega} \\
\leq \;& C_*\cdot\frac{1}{r}(\frac{t-|r-r_*|}{r})^{1-\Re\,\omega},
\end{aligned}$$

car $\frac{t}{r}>1$ et $\Re\,\omega-1<0$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}
& t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})} \int_{\{r,\, r_*>0;\ |r-r_*|<t<r+r_*\}} \Big[\frac{t^2-(r-r_*)^2}{2rr_*}\Big]^{\frac{n-1}{2}} \\
& \qquad \times \Big[t^2-(r-r_*)^2\Big]^{-\Re\,\omega} r_*^{n-1}\,dr_* \\
\leq \;& C_*\int_{\{|r-r_*|<t<r+r_*,\ r,r_*>0\}} \frac{1}{r}(\frac{t-|r-r_*|}{r})^{1-\Re\,\omega}\,dr_* \\
= \;& C_*\int_{\frac{t}{r}-1}^{\frac{t}{r}+1}(\frac{t}{r}-|h-1|)^{1-\Re\,\omega}\,dh \\
& \text{par le changement de variable } h=\frac{r_*}{r} \\
\leq \;& C;
\end{aligned}$$

car $1-\Re\,\omega>0$ et $\frac{t}{r}-|h-1|\leq 2$ pour tout $h\in[\frac{t}{r}-1,\,\frac{t}{r}+1]$.

Ceci démontre la formule (3.30).

Maintenant, on donne la démonstration du Lemme 3.7 :

En remarquant que

$$\int_{C(N)} \Big| K_2((r,\, x), (r_*,\, x_*)) \Big| \, d\mu(r_*, x_*) = \int_{C(N)} \Big| K_2((r,\, x), (r_*,\, x_*)) \Big| \, d\mu(r, x)$$

donc, pour prouver le Lemme 3.7, il suffit de montrer (3.32).

On remarque d'abord que quand $n \geq 3$ et $\Re\omega \in (\frac{1}{2},\, 1)$, pour tout $A \in [\frac{\pi}{2},\, \pi)$, on a

$$\begin{aligned} &\int_N \Big\{ [A - d_N(x,\, x_*)]^{-\Re\omega} + \frac{1}{d_N(x,\, x_*)} [A - d_N(x,\, x_*)]^{\frac{1}{2} - \Re\omega} \Big\} \\ &\qquad \cdot 1_{d_N(x, x_*) < A} \, d\mu_N(x_*) \\ \leq \;& C \int_0^A \Big[(A-h)^{-\Re\omega} + \frac{1}{h} (A-h)^{\frac{1}{2} - \Re\omega} \Big] h^{n-2} \, dh \\ \leq \;& C(\epsilon,\, n). \end{aligned}$$

Donc, d'après la définition de $K_2((r,\, x), (r_*,\, x_*))$ (voir (3.28)), pour montrer (3.32), il nous reste à démontrer qu'il existe une constante $C(\epsilon) > 0$ telle que pour tout $t > 0$ et tout $(r, x) \in C(N)$, on a

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^+} t^{2(\Re\omega - \frac{n}{2})} (r r_*)^{-\Re\omega} (\pi - A)^{-\frac{1}{2} - \Re\omega} \cdot 1_{\{|r - r_*| < t < r + r_*\}} \\ &\qquad \cdot 1_{\frac{\pi}{2} \leq A = \arccos \frac{r^2 + r_*^2 - t^2}{2 r r_*}} \, r_*^{n-1} \, dr_* < C(\epsilon). \end{aligned}$$

Mais, quand $\frac{\pi}{2} \leq A = \arccos \frac{r^2 + r_*^2 - t^2}{2 r r_*}$, on sait bien que

$$\pi - A = 2 \cdot \frac{\pi - A}{2} \sim \sin \frac{\pi - A}{2} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi - A)}{2}} = 2 \Big(\frac{(r + r_*)^2 - t^2}{4 r r_*} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour simplifier la notation, on note

$$\Sigma_{t,r} = \{ r_* > 0;\; |r - r_*| < t < r + r_* \text{ et } r^2 + r_*^2 \leq t^2 \}. \tag{3.34}$$

Alors, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^+} t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\Re\,\omega}(\pi-A)^{-\frac{1}{2}-\Re\,\omega} \\
&\qquad\qquad \cdot 1_{\{|r-r_*|<t<r+r_*\}} \cdot 1_{\frac{\pi}{2}\le A=\arccos\frac{r^2+r_*^2-t^2}{2rr_*}}\, r_*^{n-1}\,dr_* \\
\le\;& C\int_{\Sigma_{t,r}} t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\Re\,\omega}\Big(\frac{(r+r_*)^2-t^2}{4rr_*}\Big)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\Re\,\omega)} r_*^{n-1}\,dr_* \\
=\;& C\int_{\Sigma_{t,r}} t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})}(rr_*)^{-\Re\,\omega}\left[\frac{(r+r_*)^2-t^2}{4rr_*}\right]^{-\Re\,\omega} \\
&\times\left[\frac{(r+r_*)^2-t^2}{4rr_*}\right]^{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+\Re\,\omega)} r_*^{n-1}\,dr_* \\
\le\;& C_*\int_{\Sigma_{t,r}} t^{2(\Re\,\omega-\frac{n}{2})}\Big[(r+r_*)^2-t^2\Big]^{-\Re\,\omega}\cdot t^{n-1}\,dr_* \\
&\text{car } \frac{(r+r_*)^2-t^2}{4rr_*}\in(0,1),\ \Re\,\omega>\frac{1}{2} \text{ et } (3.34) \\
\le\;& C\int_{\Sigma_{t,r}} (\frac{t}{r})^{\Re\,\omega-1}(\frac{r+r_*-t}{r})^{-\Re\,\omega}\,d(\frac{r_*}{r}) \\
\le\;& C\int_{|r_*-r|<t<r+r_*} (\frac{r+r_*-t}{r})^{-\Re\,\omega}\,d(\frac{r_*}{r}) \quad \text{par } (3.34) \text{ et } \Re\,\omega<1 \\
=\;& C\int_0^2 h^{-\Re\,\omega}\,dh \quad \text{par le changement de variable } h=\frac{r_*}{r}-(\frac{t}{r}-1) \\
\le\;& C_*\cdot\frac{1}{1-\Re\,\omega},
\end{aligned}$$

car $\Re\,\omega<1$.

On a donc démontré la formule (3.32). □

D'après les Lemme 3.6, Lemme 3.7 et le théorème de convexité de Riesz, on a donc démontré la Proposition 3.2.

4. Preuve du Théorème 1.1

Le but de cette section est de montrer le Théorème 1.1.

En effet, quand

$$\begin{aligned}
\omega &= (-1+\epsilon)+[(1-\epsilon)+\frac{n+1}{2}](1+s\,i) \\
&= \frac{n+1}{2}+[(1-\epsilon)+\frac{n+1}{2}]s\,i,
\end{aligned}$$

où $s\in\mathbb{R}$ et $\frac{3}{2}<\epsilon<2$, pour $f_{\omega,t}(h)$ (voir (1.4)), on sait qu'il existe deux constantes $C, C_*>0$ telles que

$$|f_{\omega,t}(h)|\le C_* e^{C\cdot[(1-\epsilon)+\frac{n+1}{2}]|s|},\quad \forall t,h>0.$$

Voir [13] (p. 463).

Donc, nous avons

$$\|f_{\omega,t}(-\Delta)\|_{L^2(C(N))\longrightarrow L^2(C(N))}\le C_* e^{C\cdot[(1-\epsilon)+\frac{n+1}{2}]|s|},$$

pour tout $\omega=(-1+\epsilon)+[(1-\epsilon)+\frac{n+1}{2}](1+s\,i)$ où $s\in\mathbb{R}$ et $\frac{3}{2}<\epsilon<2$.

Soit $\frac{3}{2} < \epsilon < 2$ fixé. Soit $\theta(\epsilon) \in (0,1)$ qui satisfait
$$\frac{n-1}{2} = (-1+\epsilon) + [(1-\epsilon) + \frac{n+1}{2}] \cdot \theta(\epsilon).$$

On pose
$$\frac{1}{p(\epsilon)} = (1-\theta(\epsilon)) + \frac{\theta(\epsilon)}{2} = 1 - \frac{\theta(\epsilon)}{2} \text{ ou } \frac{1}{p(\epsilon)} = \frac{\theta(\epsilon)}{2}.$$

Alors, d'après le théorème d'interpolation de Stein (voir [12]), il existe une constante $C(p(\epsilon)) > 0$ telle que
$$\begin{aligned}\left\| \frac{\sin t\sqrt{-\Delta}}{t\sqrt{-\Delta}} \right\|_{L^{p(\epsilon)}(C(N)) \longrightarrow L^{p(\epsilon)}(C(N))} &= \| f_{\frac{n-1}{2},t}(-\Delta) \|_{L^{p(\epsilon)}(C(N)) \longrightarrow L^{p(\epsilon)}(C(N))} \\ &\leq C(p(\epsilon)).\end{aligned}$$

Quand ϵ parcourt tout l'intervalle $(\frac{3}{2}, 2)$, on sait que $\theta(\epsilon)$ parcourt tout l'intervalle $(\frac{n-3}{n-1}, \frac{n-2}{n})$. Donc, on en déduit que
$$\left\| \frac{\sin t\sqrt{-\Delta}}{t\sqrt{-\Delta}} \right\|_{L^{p}(C(N)) \longrightarrow L^{p}(C(N))} \leq C(p),$$
$$\forall\ \frac{1}{p} \in (\frac{1}{2}\frac{n-3}{n-1}, \frac{1}{2}\frac{n-2}{n}) \cup (\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}).$$

En utilisant encore une fois le théorème de convexité de Riesz, on obtient le théorème 1.1. □

References

[1] R. M. Beals, L^p boundedness of Fourier integral operator, *Mem. Amer. Math. Soc.* **38**, 1982. MR **84m:**42026

[2] P. Bérard, On the Wave Equation on a Compact Riemannian Manifold without Conjugate Points, *Math. Z.*, 155, 249-276, 1977. MR **56:**13295

[3] P. Bérard, Riesz Means of Riemannian Manifolds, in *Proceedings Sympos. Pure Mathematics*, n^0 36, 1-12, 1980. MR **81f:**58038

[4] J. Cheeger and M. E. Taylor, On the diffraction of waves by conical singularities. I, Comm. Pure Appl. Math. XXXV (1982) 275-331. MR **84h:**35091a

[5] I. M. Gel′fand and G. Shilov, *Generalized Functions I*, Academic Press, New York and London, 1964. MR **29:**3869

[6] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III : Pseudodifferential Operators,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985. MR **87d:**35002a

[7] N. Lohoué, Sur les estimées L^p de l'équation des ondes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math.*, 321, I, 1171-1176, 1995. MR **97h:**35021

[8] W. Magnus, F. Oberhettinger, and R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1966. MR **38:**1291

[9] A. Miyachi, On some estimates for the wave equation in L^p and H^p, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.,* 27, 331-354, 1980. MR **83g:**35060

[10] J. C. Peral, L^p estimates for the wave equation, *J. Funct. Anal.* 36, 114-145, 1980. MR **81k:**35089

[11] M. Riesz, L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Mathematica,* 81, 1-223, 1949. MR **10:**713c

[12] E. M. Stein, Interpolation of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 83, 482-492, 1956. MR **18:**575d

[13] R. Strichartz, Convolutions with Kernels having Singularites on a Sphere, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 148, 461-471, 1970. MR **41:**876

[14] Michael E. Taylor, *Noncommutative Harmonic Analysis,* Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 22, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1986. MR **88a:**22021

[15] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1944. MR **6:**64a

Inst. Hautes Études Sci. - Le Bois-Marie, 35, Route de Chartres, F-91440 Bures-Sur-Yvette Cedex, France
E-mail address: lihq@ihes.fr

Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex, France
E-mail address: Noel.LOHOUE@math.u-psud.fr